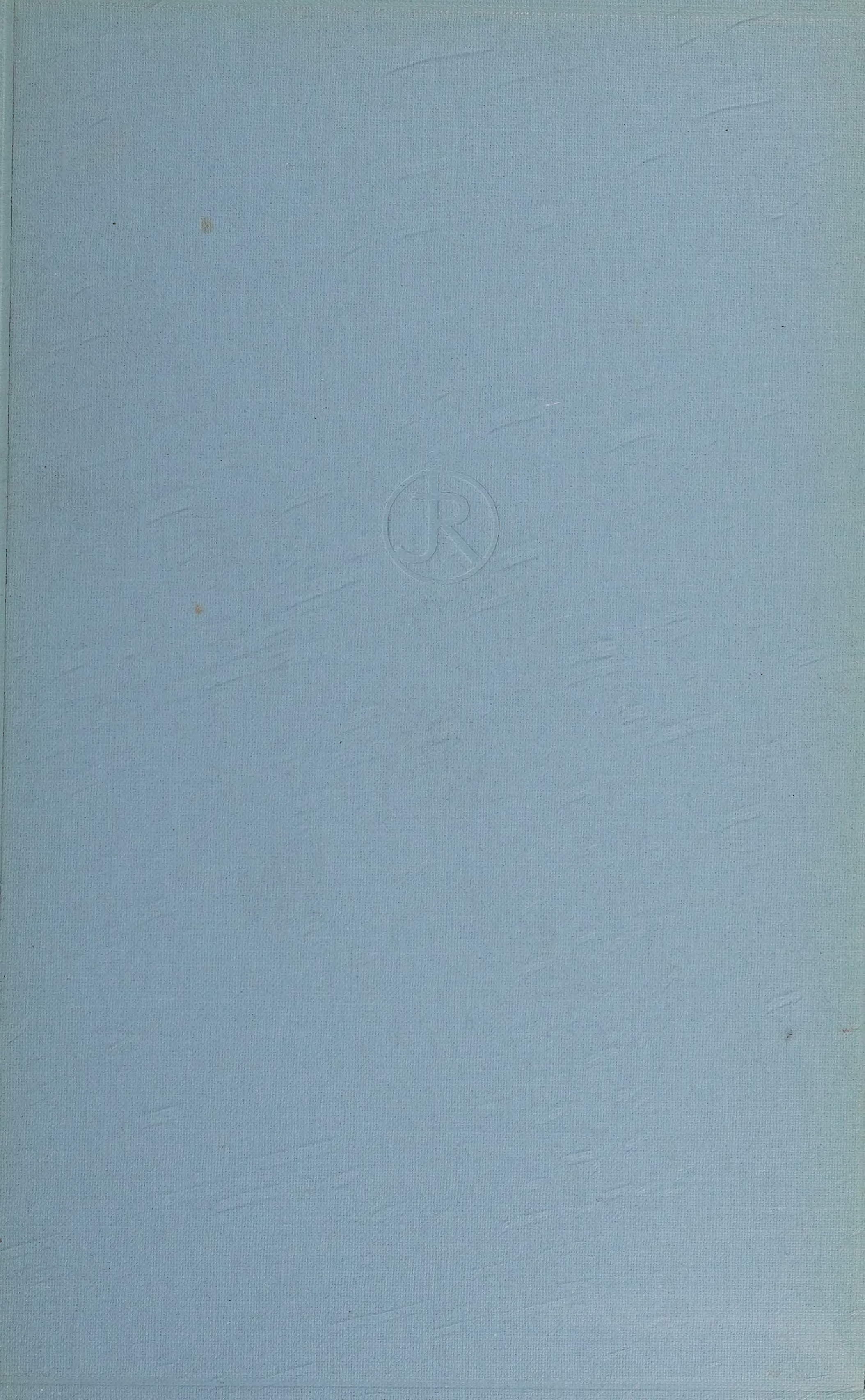
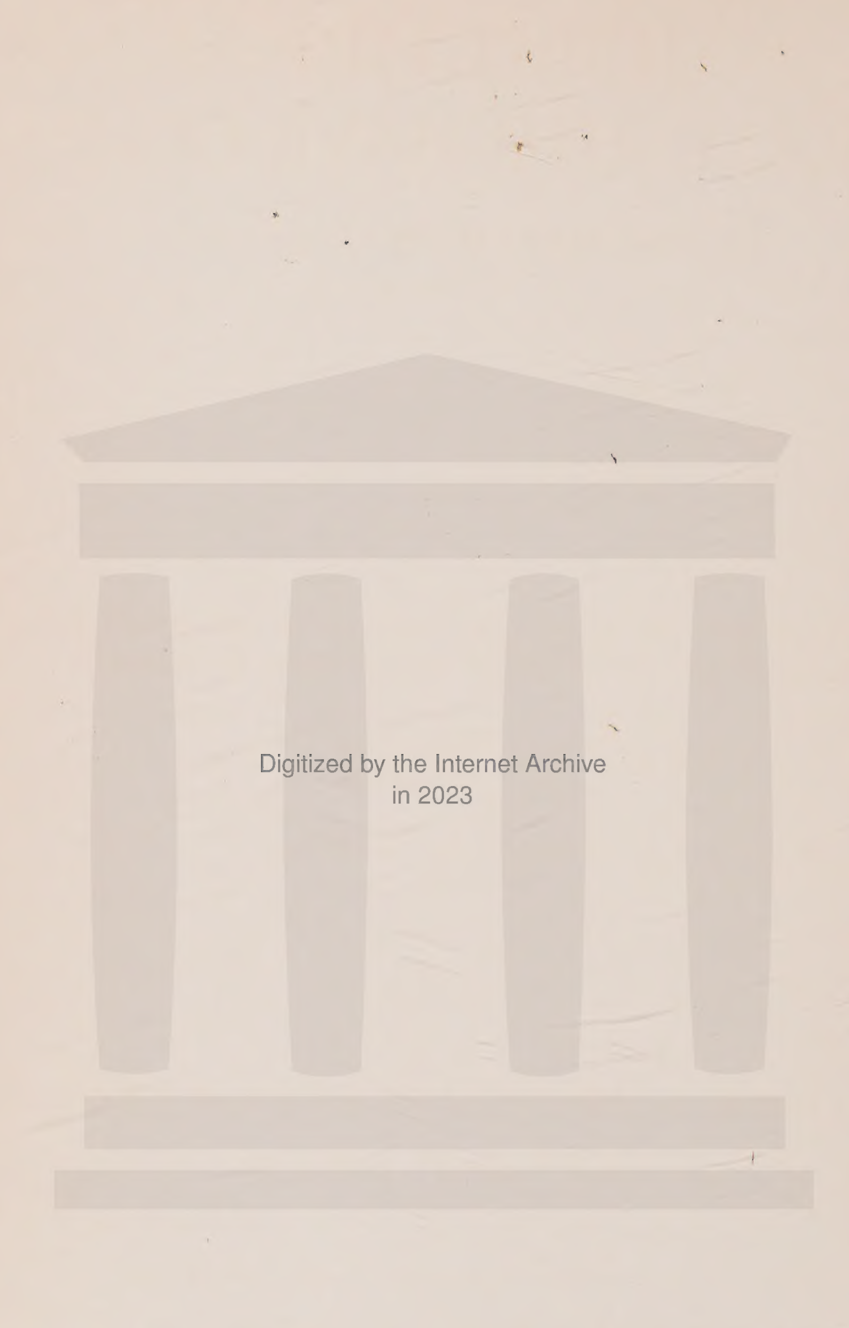




ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

TOME 7 N 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА 1943 MOSCOU

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 3–16 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ВОЗВРАТ К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ЛАПЛАСА

Предлагаемая статья дает удобную для приложений оценку погрешности классической формулы Лапласа в общем случае схемы Бернулли.

1. Перебирая старые бумаги перед отъездом из Ленинграда, я случайно разыскал черновой набросок своей статьи* «Об одном видоизменении неравенства Чебышева и о погрешности формулы Лапласа», во второй части которой был указан новый подход к оценке погрешности формулы Лапласа и, в частности, была доказана следующая теорема:

Пусть производится n опытов по схеме Бернулли, причем p есть вероятность появления события в каждом опыте ($q=1-p$), $npq \geqslant 365$.

Вероятность $P_{m_0,\, m_1}$, что число m появлений события удовлетворит неравенству

$$m_0 \leqslant m < m_1,$$

где m_0, m_1—целые числа, равна $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z_0}^{z_1} e^{-z^2}\,dz$, *где z_0 и z_1 определяются из уравнений*

$$\begin{aligned} z_0\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}\,z_0^2 &= m_0-np+\alpha, \\ z_1\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}\,z_1^2 &= m_1-np+\alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

в которых α есть какое-то число, удовлетворяющее условию

$$-\frac{3}{2}<\alpha<\frac{1}{2},$$

при предположении, что $0\leqslant z_0<z_1\leqslant\sqrt{2npq}$

$$\left(m_0-np\geqslant\frac{3}{2},\ m_1-np\leqslant\frac{3}{2}+(2npq)^{\frac{2}{3}}+\frac{q-p}{3}(2npq)^{\frac{1}{3}}\right).$$

В найденном черновике сохранилась значительная часть довольно кропотливых вычислений и оценок, которые были мною опущены при печатании статьи, и, так как попытки нескольких студентов, получавших от меня задание восполнить недостающие в статье звенья, не удались, я считаю небесполезным восстановить все вычисления, причем,

* Ученые записки Н.-И. кафедры Украины. Отдел математический (1924).

благодаря некоторому улучшению оценок, оказывается, что значения n, для которых теорема верна, могут быть снижены более чем в 5 раз, а именно, достаточно, чтобы

$$npq \geqslant 62{,}5 \tag{2}$$

(вместо $npq \geqslant 365$).

2. Мы исходим из известной формулы

$$I_{m,n} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m q^{n-m}$$

для вероятности появления события m раз при n опытах, и, пользуясь неравенствами

$$e^{\frac{1}{24n}} < \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} < e^{\frac{1}{12n}} \qquad (n \geqslant 1),$$

получаем

$$I_{m,n} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m\,(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} e^{-\frac{\theta n}{12m\,(n-m)}} \qquad \left(\frac{1}{4} < \theta < 1\right) \tag{3}$$

при $0 < m < n$.

Полагая

$$\left.\begin{aligned} w &= \left(\frac{m}{np}\right)^m\left(\frac{n-m}{nq}\right)^{n-m}, \\ m &= np + z\sqrt{2npq} + \frac{z^2}{3}\,(q-p), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

находим

$$\log w = \left[np + z\sqrt{2npq} + \frac{(q-p)}{3}z^2\right]\log\left[1 + \frac{z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2}{np}\right] +$$

$$+\left[nq - z\sqrt{2npq} - \frac{q-p}{3}z^2\right]\log\left[1 - \frac{z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2}{nq}\right] =$$

$$= \frac{1}{2npq}\left[z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2\right]^2 + \frac{p^2-q^2}{6n^2p^2q^2}\left[z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2\right]^3 +$$

$$+\frac{p^3+q^3}{12n^3p^3q^3}\left(z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2\right)^4 + \ldots = z^2 - \frac{5\,(q-p)^2 z^4}{18npq} - \frac{(q-p)^3 z^5}{9npq\sqrt{2npq}} -$$

$$-\frac{(q-p)^4 z^6}{162n^2p^2q^2} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{p^k-(-q)^k}{k\,(k+1)\,(npq)^k}\left[z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2\right]^{k+1} = z^2 + \frac{\varphi z^4}{npq}. \tag{5}$$

3. Покажем, что в формуле (5)

$$0 < \varphi < \frac{1}{8}, \tag{6}$$

если

$$0 < t = \frac{z}{\sqrt{2npq}} \leqslant \frac{1}{5}. \tag{7}$$

В дальнейшем мы всегда предполагаем неравенство (7) выполненным (изменение знака t соответствует перестановке p и q). Таким образом

$$\varphi = -\frac{5}{18}(q-p)^2 - \frac{1}{9}(q-p)^3 t - \frac{1}{81}(q-p)^4 t^2 +$$

$$+\frac{1}{3}(p^3+q^3)\left(1 + \frac{q-p}{3}t\right)^4 + \frac{2}{5}(p^4-q^4)\,t\left(1 + \frac{q-p}{3}t\right)^5 + \varepsilon, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \sum_{k=5}^{\infty} \frac{p^k - (-q)^k}{k(k+1)} t^{k-3} \left[2 + \frac{2}{3}(q-p)t \right]^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=3}^{\infty} c_i t^{2i-4} \left[2 + \frac{2}{3}(q-p)t \right]^{2i},$$

$$c_i = \frac{1}{2i} \left[\frac{p^{2i-1} + q^{2i-1}}{2i-1} + (p^{2i} - q^{2i}) \frac{2t + \frac{2}{3}(q-p)t^2}{2i+1} \right] > 0;$$

поэтому $\varepsilon > 0$. Кроме того, при $q < p$,

$$c_i < \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{2i-1} + \frac{28}{75(2i+1)} \right] \leqslant \frac{19}{450},$$

поэтому

$$\varepsilon < \frac{152 t^2}{225} \sum_{0}^{\infty} (2t)^{2i} < \frac{152}{4725} < 0{,}0322;$$

при $q \geqslant p$, $t = \frac{1}{5}$,

$$c_i \leqslant \frac{1}{2i} \left[\frac{p^{2i-1} + q^{2i-1}}{2i-1} + \frac{2(p^{2i} - q^{2i})}{5(2i+1)} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{2}{5(2i+1)} \right),$$

поэтому, принимая во внимание, что ε растет вместе с t,

$$\varepsilon < \frac{8}{21} \cdot \frac{\left(\frac{16}{15}\right)^6}{25 - \left(\frac{32}{15}\right)^2} < 0{,}03.$$

Таким образом, полагая $q - p = \delta$, имеем

$$\varphi = -\frac{5}{18}\delta^2 - \frac{1}{9}\delta^3 t - \frac{1}{81}\delta^4 t^2 + \frac{1+3\delta^2}{12}\left(1 + \frac{\delta t}{3}\right)^4 - \frac{1}{5}\delta(1+\delta^2)t\left(1 + \frac{\delta t}{3}\right)^5 + \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{\delta^2}{36} - \frac{\delta t}{45}(4 - \delta^2) - \frac{\delta^2 t^2}{162}(45 + 29\delta^2) - \frac{\delta^3 t^3}{81}(17 + 15\delta^2) -$$

$$- \frac{\delta^4 t^4}{324}\left(\frac{71}{3} + 23\delta^2\right) - \frac{\delta^5 t^5}{81}(1 + \delta^2) - \frac{\delta^6 t^6}{1215}(1 + \delta^2) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\varphi > \frac{1}{12} - \frac{1}{36} - \frac{1}{75} - \frac{37}{81 \cdot 25} - \frac{32}{81 \cdot 125} - \frac{7}{81 \cdot 375} -$$

$$- \frac{2}{81 \cdot 3125} - \frac{2}{1215 \cdot (125)^2} > 0. \qquad (9)$$

С другой стороны, замечая, что сумма членов, содержащих t в степени выше третьей, отрицательна, имеем

$$\varphi < \frac{1}{12} - \frac{\delta^2}{36} - \frac{\delta t}{45}(4 - \delta^2) - \frac{\delta^2 t^2}{810}[191 + 115\delta^2] + \varepsilon$$

$\left(\text{так как } |\delta t| < \frac{1}{5}\right)$. Поэтому, пользуясь формулой для максимума многочлена второй степени, находим, что

$$\varphi < \frac{1}{12} - \frac{\delta^2}{36} + \frac{(4 - \delta^2)^2}{4 \cdot 45^2} \cdot \frac{810}{191 + 115\delta^2} + \varepsilon < \frac{1}{12} + \frac{8}{955} + \varepsilon < \frac{1}{3}. \qquad (10)$$

Заметим еще, что

$$\frac{m}{np}\cdot\frac{n-m}{nq}=\left[1+\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z^2}{np}\right]\left[1-\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z^2}{nq}\right]=$$

$$=1+\frac{q-p}{npq}\left(z\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z^2\right)-\frac{\left(z\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z^2\right)^2}{n^2pq}=$$

$$=1+2(q-p)t\left[1+\frac{q-p}{3}t\right]-4pqt^2\left(1+\frac{q-p}{3}t\right)^2=1+2\delta t\left[1+\frac{\delta}{3}t\right]-$$

$$-(1-\delta^2)t^2\left(1+\frac{\delta}{3}t\right)^2 \tag{11}$$

при данном $t\left(0<t\leqslant\frac{1}{5}\right)$ возрастает вместе с δ; поэтому

$$1-\frac{28}{75}<\frac{m}{np}\cdot\frac{n-m}{nq}<1+\frac{32}{75}.$$

Следовательно, из (3), (4), (5) и (6) заключаем, что

$$\sqrt{\frac{n}{\pi m(n-m)}}\,e^{-z^2-\frac{z^4}{8npq}-\frac{1.1}{8npq}}<I_{m,n}<\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\,e^{-z^2}. \tag{12}$$

4. Для доказательства высказанной вначале теоремы введем величину $z_1>z$, определяемую равенством

$$m+\frac{1}{2}=np+z_1\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_1^2; \tag{13}$$

в таком случае

$$z_1^2-z^2=\frac{1}{2}\,\frac{z_1+z}{\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}(z_1+z)}>\frac{z}{\sqrt{2npq}+\frac{2}{3}(q-p)z}. \tag{14}$$

Кроме того, если

$$m+\frac{3}{2}=np+(z_1+\Delta_1)\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}(z_1+\Delta_1)^2,$$

то

$$\Delta_1\left[\sqrt{2npq}+\frac{2}{3}(q-p)\left(z_1+\frac{1}{2}\Delta_1\right)\right]=1.$$

Поэтому можем написать

$$\sqrt{\frac{n}{2m(n-m)}}=$$

$$=\Delta_1\frac{1+\frac{2}{3}\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}\left(z_1+\frac{1}{2}\Delta_1\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{z+\sqrt{2npq}+\frac{1}{3}(q-p)z^2}{np}\right)\left(1-\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{1}{3}(q-p)z^2}{nq}\right)}}.$$

Пользуясь левою частью неравенства (12), покажем, что

$$I_{m,n}>\frac{\Delta_1}{\sqrt{\pi}}e^{-z_1^2}. \tag{15}$$

Таким образом нужно проверить, что

$$G = \frac{\left[1 + \frac{2}{3}\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}\left(z_1 + \frac{1}{2}\Delta_1\right)\right] e^{z_1^2 - z^2 - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq}}}{\sqrt{\left[1 + \frac{z\sqrt{2npq} + \frac{1}{3}(q-p)z^2}{np}\right]\left[1 - \frac{z\sqrt{2npq} + \frac{1}{3}(q-p)z^2}{nq}\right]}} > 1 \qquad (16)$$

при условии $\frac{1}{\sqrt{2npq}} < z < \sqrt[6]{2npq}$ и $z < \frac{1}{5}\sqrt{2npq}$ (последнее неравенство, очевидно, будет вытекать из первого, если $npq \geq 62,5$).

Пусть $q \geq p$. Тогда, вследствие (14)

$$G > \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}z\right) e^{\frac{z}{\sqrt{2npq} + \frac{2}{3}(q-p)z} - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq}}}{\sqrt{1 + \frac{q-p}{npq}\left[z\sqrt{2npq} + \frac{1}{3}(q-p)z^2\right] - \frac{1}{n^2pq}\left[z\sqrt{2npq} + \frac{1}{3}(q-p)z^2\right]^2}} >$$

$$> \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}z\right)\left(1 - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq}\right) e^{\frac{z}{\sqrt{2npq} + \frac{2}{3}(q-p)z}}}{\sqrt{1 + \frac{q-p}{npq}\left[z\sqrt{2npq} + \frac{1}{3}(q-p)z^2\right]}} >$$

$$> \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}z\right)\left(1 - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq}\right) + \frac{z}{\sqrt{2npq}}}{1 + (q-p)\frac{z}{\sqrt{2npq}}} >$$

$$> \left\{1 - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq} + \frac{z}{\sqrt{2npq}}\left[1 + \frac{2}{3}(q-p)\left(1 - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \left\{1 - (q-p)\frac{z}{\sqrt{2npq}}\right\} > \left\{1 - \frac{1,1}{8npq} +\right.$$

$$\left. + \frac{z}{\sqrt{2npq}}\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}(q-p)\left(1 - \frac{1}{20} - \frac{1,1}{8npq}\right)\right]\right\}\left\{1 - (q-p)\frac{z}{\sqrt{2npq}}\right\} >$$

$$> 1 - \frac{1,1}{8npq} + \frac{z}{\sqrt{2npq}}\left[\frac{3}{4} - (q-p)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1,1}{12npq}\right)\right] - \frac{17z^2}{24npq} >$$

$$> 1 - \frac{1,1}{8npq} + 0,38\frac{z}{\sqrt{2npq}} - \frac{17z^2}{24npq} > 1.$$

2) Пусть $q < p$. В таком случае, учитывая, что $z_1 = z + \frac{1}{2}\Delta_1 < \frac{5}{4\sqrt{2npq}}$, имеем

$$G > \frac{\left[1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}z + \frac{5(q-p)}{12npq}\right]\left[1 + \frac{z}{\sqrt{2npq} + \frac{2}{3}(q-p)z} - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq}\right]}{\sqrt{1 + \frac{q-p}{npq}\left(z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2\right)}} >$$

$$> \frac{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}z + \frac{5(q-p)}{12npq} - \frac{z^4}{8npq} - \frac{1,1}{8npq} + \frac{z}{\sqrt{2npq}} + \frac{5(q-p)z}{12npq\left(\sqrt{2npq} + \frac{2}{3}(q-p)z\right)}}{\sqrt{1 + \frac{q-p}{npq}\left(z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2\right)}} >$$

$$>\left\{1+\frac{5(q-p)}{12npq}-\frac{1,1}{8npq}+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{\sqrt{2npq}}\left[1-\frac{z^3}{4\sqrt{2npq}}+(q-p)\left(\frac{2}{3}+\frac{25}{52npq}\right)\right]\right\}\left\{1-\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}z\right\}.$$

При $z \geqslant \frac{1,2}{\sqrt{2npq}}$ воспользуемся (как и раньше) неравенством $\frac{z^3}{\sqrt{2npq}} \leqslant \leqslant 1$ и, замечая, что коэффициенты при z в обоих множителях положительны, видим, что

$$G>\left\{1+\frac{5(q-p)}{12npq}-\frac{1,1}{8npq}+\frac{1,2}{2npq}\left[\frac{3}{4}+(q-p)\left(\frac{2}{3}+\frac{25}{52npq}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{0,6\,(q-p)}{npq}\right\}\geqslant\left(1-\frac{12,1}{24npq}-\frac{15}{52n^2p^2q^2}\right)\left(1+\frac{0,6}{npq}\right)>1.$$

При $\frac{1}{\sqrt{2npq}} \leqslant z < \frac{1,2}{\sqrt{2npq}}$ воспользуемся оценкой $\frac{z^3}{\sqrt{2npq}} < \frac{1}{2n^2p^2q^2}$; в таком случае:

$$G>\left\{1+\frac{5(q-p)}{12npq}-\frac{1,1}{8npq}+\frac{1}{2npq}\left[1-\frac{1}{8n^2p^2q^2}+(q-p)\left(\frac{2}{3}+\frac{25}{52npq}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{p-q}{2npq}\right\}\geqslant\left[1-\frac{3,1}{8npq}-\frac{25}{104n^2p^2q^2}-\frac{1}{16n^3p^3q^3}\right]\left[1+\frac{1}{2npq}\right]>1.$$

5. Перейдем теперь к выводу неравенства

$$I_{m,n}<\frac{\Delta_0}{\sqrt{\pi}}e^{-z_0^2}, \tag{17}$$

где

$$m-\frac{1}{2}=z_0\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_0^2+np,$$
$$m-\frac{3}{2}=(z_0-\Delta_0)\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}(z_0-\Delta_0)^2+np, \tag{18}$$

так что

$$1=\Delta_0\left[\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}(2z_0-\Delta_0)\right].$$

Таким образом нужно проверить, что при $0<\Delta_0 \leqslant z_0 < z \leqslant \frac{1}{5}\sqrt{2npq}$ соблюдается неравенство

$$\frac{\left[1+\frac{q-p}{3\sqrt{2npq}}(2z_0-\Delta_0)\right]e^{z_0^2-z^2}}{\sqrt{\left[1+\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{1}{3}(q-p)z^2}{np}\right]\left[1-\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{1}{3}(q-p)z^2}{nq}\right]}}<1. \tag{19}$$

1) Пусть $q \geqslant p$. Принимая во внимание, что знаменатель растет вместе с z и что

$$z^2-z_0^2=\frac{1}{2}\,\frac{z+z_0}{\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}(z+z_0)}>\frac{z_0}{\sqrt{2npq}+\frac{2}{3}(q-p)z_0},$$

достаточно показать, что

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}\,z_0\right)e^{-\frac{z_0}{\sqrt{2npq}+\frac{2}{3}(q-p)\,z_0}}}{\sqrt{1+\frac{q-p}{npq}\left(z_0\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}\,z_0^2\right)-\frac{1}{n^2pq}\left(z_0\sqrt{2npq}+\frac{p-q}{3}\,z\right)^2}}<1,$$

т. е., полагая $t_0=\frac{z_0}{\sqrt{2npq}}<\frac{1}{5}$, $\delta=q-p\geqslant 0$, что

$$e^{-\frac{t_0}{1+\frac{2}{3}\delta t_0}}<\frac{\sqrt{1+2\delta t_0\left(1+\frac{\delta}{3}t_0\right)-(1-\delta^2)\,t_0^2\left(1+\frac{\delta}{3}\,t_0\right)^2}}{1+\frac{2}{3}\delta t_0}.$$

Но замечая, что подкоренное количество больше, чем $1-t_0^2+ +2\delta t_0\left(1-\frac{t_0^2}{2}\right)$, достаточно проверить, что имеет место неравенство

$$\frac{\sqrt{1-t_0^2+2\delta t_0\left(1-\frac{1}{2}\,t_0^2\right)}}{\left(1+\frac{2}{3}\,\delta t_0\right)^2}\left(1+t_0+\frac{2}{3}\,\delta t_0\right)>1,$$

в правильности которого убеждаемся, принимая во внимание, что левая его часть достигает наименьшего значения при $\delta=0$.

2) Пусть $q<p$. Заметим прежде всего, что из $z_0-\Delta_0>0$ следует, благодаря формуле конечных приращений, что

$$\frac{3}{2}=(z-z_0+\Delta_0)\left[\sqrt{2npq}+\frac{2}{3}(q-p)\,z'\right],$$

где $0<z'<z$, откуда

$$z>\frac{3}{2\sqrt{2npq}},\quad t=\frac{z}{\sqrt{2npq}}>\frac{3}{4npq}.$$

Кроме того,

$$\Delta_0=\frac{1}{\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}\,(2z_0-\Delta_0)}<\frac{1}{\sqrt{2npq}\left(1+\frac{2\,(q-p)\,z}{3\sqrt{2npq}}\right)},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2npq}}<z-z_0<\frac{1}{2\sqrt{2npq}\left(1+\frac{2\,(q-p)\,z}{3\sqrt{2npq}}\right)},$$

откуда

$$z_0>z-\frac{15}{26\sqrt{2npq}},$$

$$z^2-z_0^2>\frac{z}{\sqrt{2npq}}-\frac{15}{104npq}.$$

Поэтому вывод неравенства (19) приводится к

$$1+\frac{2}{3}\cdot\frac{q-p}{\sqrt{2npq}}\left[z-\frac{1}{\sqrt{2npq}\left(1+\frac{2(q-p)z}{3\sqrt{2npq}}\right)}\right]<$$

$$<\left(1-\frac{15}{104npq}+\frac{z}{\sqrt{2npq}}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\left[1+\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{1}{3}(q-p)z^2}{nq}\right]\left[1-\frac{z\sqrt{2npq}+\frac{1}{3}(q-p)z^2}{nq}\right]},$$

т. е., полагая $p-q=x>0$, к неравенству

$$1<\frac{2}{3}tx-\frac{x}{3npq\left(1-\frac{2}{3}tx\right)}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{8npq}+t\right)\sqrt{1-2tx\left(1-\frac{tx}{3}\right)-(1-x^2)t^2\left(1-\frac{tx}{3}\right)^2}. \qquad (20)$$

Полагая сначала $x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, мы уменьшим корень, стоящий в правой части неравенства, заменив его через $\sqrt{1-2tx+t^2x^2}=1-tx$; поэтому в этом случае достаточно показать, что

$$1<\frac{2}{3}tx-\frac{x}{3npq\left(1-\frac{2}{3}tx\right)}+\left(1-\frac{15}{104npq}+t\right)(1-tx),$$

т. е.

$$\frac{15}{104npq}<t\left[1-x\left(\frac{1}{3}-\frac{15}{104npq}+t\right)\right]-\frac{x}{3npq\left(1-\frac{2}{3}tx\right)}.$$

При возрастании x правая часть убывает; поэтому остается проверить, что

$$\frac{15}{104npq}<t\left[\frac{2}{3}+\frac{15}{104npq}-t\right]-\frac{1}{npq(3-2t)},$$

и так как при $\frac{3}{4npq}\leqslant t\leqslant\frac{1}{5}$ правая часть растет вместе с t, то неравенство приводится к

$$\frac{15}{104}<\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{63}{104npq}\right)-\frac{1}{3\left(1-\frac{1}{2npq}\right)}.$$

Если $x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, то подкоренное количество в (20) можно заменить меньшей величиной $1-2tx-t^2$. После этого правая часть неравенства

$$1<\frac{2}{3}tx-\frac{x}{3npq\left(1-\frac{2}{3}tx\right)}+\left(1-\frac{15}{104npq}+t\right)\sqrt{1-2tx-t^2}$$

достигает наименьшего значения при $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; поэтому достаточно проверить, что

$$1<\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6npq\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}+\left(1-\frac{15}{104npq}+t\right)\sqrt{1-t\sqrt{3}-t^2},$$

и так как вторая производная по t отрицательна, то правая часть достигает наименьшего значения при крайних значениях t. Но при $t = \frac{1}{5}$ имеем

$$\frac{1}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{2npq\left(\sqrt{3} - \frac{1}{5}\right)} + \left(\frac{6}{5} - \frac{15}{104npq}\right)\sqrt{\frac{24}{25} - \frac{\sqrt{3}}{5}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{25(5\sqrt{3} - 1)} + 1{,}197\sqrt{\frac{24}{25} - \frac{\sqrt{3}}{5}} > 1;$$

при $t = \frac{3}{4npq}$ имеем также

$$\frac{\sqrt{3}}{4npq}\left[1 - \frac{2}{3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4npq}\right)}\right] + \left(1 + \frac{63}{104npq}\right)\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{4npq} - \frac{9}{16n^2p^2q^2}} >$$

$$> \frac{\sqrt{3}}{12npq} - \frac{3}{12n^2p^2q^2} + \left(1 + \frac{63}{104npq}\right)\left(1 - \frac{3}{4npq}\right) > 1.$$

6. Таким образом *мы показали, что*

$$\frac{\Delta_1}{\sqrt{\pi}} e^{-z_1^2} < I_{m,n} < \frac{\Delta_0}{\sqrt{\pi}} e^{-z_0^2} \tag{21}$$

при условии, что в равенстве (4) $z \leqslant \sqrt[6]{2npq}$, $z_0 - \Delta_0 \geqslant 0$ (т. е. если $m - np - \frac{3}{2} \geqslant 0$) и $npq \geqslant 62{,}5$. В таком случае, вследствие убывания функции e^{-z^2}, заключаем *, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_1+\Delta_1} e^{-z^2} dz < I_{m,n} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0-\Delta_0}^{z_0} e^{-z^2} dz.$$

Поэтому

$$P_{m_0,m_1} = \sum_{m_0}^{m_1-1} I_{m,n}$$

удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_0}^{b_0} e^{-z^2} dz < P_{m_0,m_1} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{b_1} e^{-z^2} dz, \tag{22}$$

---

* Принимая во внимание направление выпуклости кривой e^{-z^2}, можно было бы при $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$ в первом из интегралов заменить пределы интегрирования через z и $z + \Delta z$, а при $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$ заменить пределы во втором интеграле через $z - \Delta z$ и z.

где a_0, b_0, a_1, b_1 определяются соответственно из равенств

$$\left.\begin{aligned} m_0 + \frac{1}{2} &= np + a_0\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a_0^2 \\ m_1 + \frac{1}{2} &= np + b_0\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}b_0^2 \\ m_0 - \frac{3}{2} &= np + a_1\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a_1^2 \\ m_1 - \frac{3}{2} &= np + b_1\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}b_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (a_1 \geqslant 0,\ b_1 \leqslant \sqrt[6]{2npq}, \ npq \geqslant 62{,}5). \qquad (23)$$

Следовательно, высказанное вначале утверждение вытекает из того, что при непрерывном изменении α от $-\frac{3}{2}$ до $\frac{1}{2}$ интеграл $\int\limits_{z_0}^{z_1} e^{-z^2}dz$, где z_0 и z_1 определяются равенствами (1), проходит через все значения между*

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} e^{-z^2}dz \quad \text{и} \quad \int\limits_{a_1}^{b_1} e^{-z^2}dz.$$

Иначе говоря, если a и b определяются из равенств:

$$\begin{aligned} m_0 - \frac{1}{2} &= np + a\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a^2, \\ m_1 - \frac{1}{2} &= np + b\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}b^2, \end{aligned} \qquad (24)$$

то

$$P_{m_0+1,m_1+1} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_a^b e^{-z^2}dz < P_{m_0-1,m_1-1},$$

так что

$$I_{m_1-1,n} - I_{m_0-1,n} < P_{m_0,m_1} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_a^b e^{-z^2}dz < I_{m_0,n} - I_{m_1,n},$$

откуда, в частности, следует, что

$$\left| P_{m_0,m_1} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_a^b e^{-z^2}dz \right| < I_{m_0-1,n}. \qquad (25)$$

7. Для оценки погрешности формулы Лапласа при любых $m_0 < m_1$ нужно воспользоваться уточнением неравенства Чебышева, данным в той же статье; применим это уточненное неравенство в форме, установленной на стр. 168 четвертого издания моего курса «Теории вероятностей»: *вероятность неравенства*

$$m \geqslant np + z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2 + \frac{(p^3+q^3)z^3}{3\sqrt{2npq}} \qquad (z > 0) \qquad (26)$$

меньше, чем e^{-z^2}.

Таким образом, сохраняя лишь условие, что $m_0 - \frac{3}{2} \geqslant np$ $(a_1 \geqslant 0)$, находим, что вероятность $P_{m_0,\infty}$ неравенства $m_0 \leqslant m$ равна

$$P_{m_0,\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a_1}^{b_1} e^{-z^2}dz + P_{m_1,\infty} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a_1}^{b_1} e^{-z^2}dz + e^{-t^2},$$

---

* Во всех наших вычислениях предполагалось, что $z \leqslant \sqrt[6]{2npq}$, но результат их не изменился бы, если бы мы ввели немного более широкое условие: $z_0 - \Delta_0 \leqslant \sqrt[6]{2npq}$.

где

$$m_1 = np + t\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}t^2 + \frac{p^3+q^3}{3\sqrt{2npq}}t^3, \tag{27}$$

причем можем принять, что m_1 является наименьшим целым числом, для которого значение z, определяемое из равенства

$$m_1 - \frac{1}{2} = np + z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}z^2,$$

больше, чем $\sqrt[6]{2npq}$; в таком случае t, определяемое из (27), будет a fortiori больше, чем $\sqrt[6]{2npq}$.

Следовательно,

$$P_{m_0,\infty} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_1}^{\infty} e^{-z^2}dz + e^{-\sqrt[3]{2npq}}, \tag{28}$$

где

$$m_0 - \frac{3}{2} = np + a_1\sqrt{2npq} + \frac{(q-p)}{3}a_1^2.$$

С другой стороны,

$$P_{m_0,\infty} > \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_0}^{\sqrt[6]{2npq}} e^{-z^2}dz > \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_0}^{\infty} e^{-z^2}dz - \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[6]{2npq}}, \tag{29}$$

где

$$m_0 + \frac{1}{2} = np + a_0\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a_0^2.$$

8. Применяя те же неравенства к $n-m$, находим, что при $m_0' + \frac{3}{2} \leqslant np$ вероятность $P_{-\infty,m_0'+1}$ неравенства

$$m \leqslant m_0',$$

удовлетворяет неравенству

$$P_{-\infty,m_0'+1} < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_1'}^{\infty} e^{-z^2}dz + e^{-\sqrt[3]{2npq}}, \tag{28-bis}$$

где

$$n - m_0' - \frac{3}{2} = nq + a_1'\sqrt{2npq} + \frac{p-q}{3}a_1'^2,$$

т. е.

$$m_0' + \frac{3}{2} = np - a_1'\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a_1'^2.$$

С другой стороны,

$$P_{-\infty,m_0'+1} > \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_0'}^{\infty} e^{-z^2}dz - \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[6]{2npq}}, \tag{29-bis}$$

где

$$m_0' - \frac{1}{2} = np - a_0'\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a_0'^2.$$

Поэтому вероятность P_{M_0,m_0} неравенства

$$M_0 = m_0' + 1 \leqslant m \leqslant m_0 - 1 = M_1, \quad \left(M_0 + \frac{1}{2} \leqslant np,\ M_1 - \frac{1}{2} \geqslant np\right), \tag{30}$$

равная $1 - P_{-\infty,M_0} - P_{m_0,\infty}$, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_1}^{a_1} e^{-z^2} dz - 2e^{-\sqrt[3]{2npq}} < P_{M_0,M_1+1} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a_0'}^{a_0} e^{-z^2} dz + \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[6]{2npq}},$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz - 2e^{-\sqrt[3]{2npq}} < P_{M_0,M_1+1} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0'}^{z_1'} e^{-z^2} dz + \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt[6]{2npq}}, \tag{31}$$

где

$$\left.\begin{aligned} M_0 + \frac{1}{2} &= np + z_0\sqrt{2npq} + \frac{z_0^2}{3}(q-p), \\ M_1 - \frac{1}{2} &= np + z_1\sqrt{2npq} + \frac{z_1^2}{3}(q-p), \\ M_0 - \frac{3}{2} &= np + z_0'\sqrt{2npq} + \frac{z_0'^2}{3}(q-p), \\ M_1 + \frac{3}{2} &= np + z_1'\sqrt{2npq} + \frac{z_1'^2}{3}(q-p). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Заметим в заключение, что произведенные выше оценки могли бы быть несколько улучшены, если бы мы исключили значения $|q-p|$, близкие к 1. Так, например, при предположении

$$|q-p| \leqslant \frac{4}{5},$$

т. е.

$$0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}9$$

неравенства (6) остаются в силе при $t = \frac{z}{\sqrt{2npq}} \leqslant \frac{1}{4}$, и, почти не меняя дальнейших вычислений, можно убедиться, что окончательный результат остается тогда верен при $npq \geqslant 32$. Впрочем, поскольку в дальнейших вычислениях требование $z \leqslant \sqrt[6]{2npq}$ сохраняется, оценка, вытекающая из связанного с этим условием неравенства (31), быстро ухудшается с уменьшением npq.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
11 VI 1942

S. N. BERNSTEIN. RETOUR AU PROBLÈME DE L'ÉVALUATION DE L'APPROXIMATION DE LA FORMULE LIMITE DE LAPLACE

RÉSUMÉ

En adoptant les notations habituelles du schéma de Bernoulli et en supposant

$$npq \geqslant 62{,}5 \tag{2}$$

on démontre que la probabilité P_{m_0, m_1} de l'inégalité

$$m_0 \leqslant m < m_1$$

où m_0, m_1 sont des nombres entiers, satisfait aux inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a_0}^{b_0} e^{-z^2}\, dz < P_{m_0, m_1} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a_1}^{b_1} e^{-z^2}\, dz, \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned} m_0 + \frac{1}{2} &= np + a_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} a_0^2, \\ m_1 + \frac{1}{2} &= np + b_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} b_0^2, \\ m_0 - \frac{3}{2} &= np + a_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} a_1^2, \\ m_1 - \frac{3}{2} &= np + b_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} b_1^2, \end{aligned} \tag{23}$$

pour vu que $a_1 \geqslant 0$, $b_1 \leqslant \sqrt[6]{2npq}$. Il en résulte que dans ces conditions

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{b}^{b_0} e^{-z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a}^{a_0} e^{-z^2} dz < P_{m_0, m_1} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a}^{b} e^{-z^2} dz < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a_1}^{a} e^{-z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{b_1}^{b} e^{-z^2} dz,$$

où

$$\begin{aligned} m_0 - \frac{1}{2} &= np + a \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} a^2, \\ m_1 - \frac{1}{2} &= np + b \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} b^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Ensuite, en utilisant le fait établi anterieurement par l'auteur que la probabilité de l'inégalité

$$m \geqslant np + z \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z^2 + \frac{p^3 + q^3}{3 \sqrt{2npq}} z^3 \quad (z > 0) \tag{26}$$

est inférieure à e^{-z^2} (pour toute valeur de n et de $z > 0$), on démontre que la probabilité P_{M_0, M_1+1} de l'inégalité

$$M_0 \leqslant m \leqslant M_1, \tag{30}$$

où $M_0 \leqslant np - \frac{1}{2}$, $M_1 \geqslant np + \frac{1}{2}$ sont des nombres entiers, satisfait aux inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz - 2e^{-\sqrt[3]{2npq}} < P_{M_0, M_1+1} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z'_0}^{z'_1} e^{-z^2} dz + \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[6]{2npq}}, \tag{31}$$

où

$$\left.\begin{aligned} M_0 + \frac{1}{2} &= np + z_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_0^2, \\ M_1 + \frac{1}{2} &= np + z_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_1^2, \\ M_0 - \frac{3}{2} &= np + z'_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z'^2_0, \\ M_1 - \frac{3}{2} &= np + z'_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z'^2_1. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 17—34 Série mathématique

И. М. ВИНОГРАДОВ

УТОЧНЕНИЕ МЕТОДА ОЦЕНКИ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Даются новые, более точные оценки сумм

$$\sum_{p\leqslant N}\chi(p+k),\quad \sum_{p\leqslant N}\chi(p(p+k)),\quad \sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}.$$

В настоящей работе я даю новую, более точную, чем ранее, оценку сумм вида

$$\sum_{p\leqslant N}\chi(p+k),\quad \sum_{p\leqslant N}\chi(p(p+k)),\quad \sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p},$$

где p пробегает простые числа. Указываемый прием позволяет улучшить оценки всевозможных аналогичных сумм.

Обозначения. Символические неравенства $A\ll B$ или $B\gg A$ показывают, что $A=O(B)$.

Буквой ε обозначается произвольное положительное постоянное <1.

ЛЕММА 1. *Пусть q — простое, $q>2$, $(k,q)=1$, $\chi(a)$ — не главный характер по модулю q,*

$$S=\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\xi(x)\eta(y)\chi(xy+k);$$

$$S'=\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\xi(x)\eta(y)\chi(xy(xy+k));$$

$$\sum_{x=0}^{q-1}|\xi(x)|^2\leqslant X,\quad \sum_{y=0}^{q-1}|\eta(y)|^2\leqslant Y.$$

Тогда имеем

$$|S|<\sqrt{2XYq};\quad |S'|<\sqrt{2XYq}.$$

Доказательство. Имеем

$$|S|^2\leqslant X\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y_1=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\eta(y_1)\overline{\eta(y)}\chi\left(\frac{xy_1+k}{xy+k}\right)$$

(равны нулю слагаемые с xy_1+k и $xy+k$ кратными q).

Часть выражения, стоящего справа, отвечающая случаям $y_1=y$, не превосходит XqY. Рассмотрим часть, отвечающую паре не равных между собой значений y_1 и y, причем для определенности считаем $y>0$.

Указанная часть равна

$$X\eta(y_1)\overline{\eta(y)}\sum_{x=0}^{q-1}\chi\left(\frac{y_1}{y}+\frac{k\left(1-\frac{y_1}{y}\right)}{xy+k}\right)=X\eta(y_1)\eta(y)\chi\left(\frac{y_1}{y}\right).$$

При этом имеем

$$X\sum_{y_1=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}|\eta(y_1)||\eta(y)|\leqslant XqY.$$

Сумма S' оценивается почти так же, как и сумма S.

ЛЕММА 2. *Пусть q — простое, $q>2$, $(k, q)=1$, $\chi(a)$ — не главный характер по модулю q,*

$$S=\sum_{x=0}^{q-1}\chi(x(+k)).$$

Тогда имеем

$$S=-1, \text{ если } \chi(a)=\left(\frac{a}{q}\right)$$

$$|S|=\sqrt{q}, \text{ в остальных случаях.}$$

Доказательство. Первое равенство выводится тривиально. Второе получим, оценивая

$$|S|^2=\sum_{t=1}^{q-1}\sum_{x=1}^{q-1}\chi\left(\frac{t(tx+k)}{x+k}\right),$$

где, при данном t, исключаются значения x с условиями $x+k\equiv 0 \pmod q$, $tx+k\equiv 0 \pmod q$.

ЛЕММА 3. *Пусть q — простое, $q>2$, $(k, q)=1$, $\chi(a)$ — не главный характер по модулю q; M, N, X, Y — целые, $X>0$, $Y>0$,*

$$S=\sum_{x=M+1}^{M+X}\sum_{y=N+1}^{N+Y}\xi(x)\eta(y)\chi(xy+k),$$

$$S'=\sum_{x=M+1}^{M+X}\sum_{y=N+1}^{N+Y}\xi(x)\eta(y)\chi(xy(xy+k));$$

$$0<\xi(x)\ll\alpha,\ 0<\eta(y)\ll\beta.$$

Тогда имеем

$$S\ll\alpha\beta XYF,\ S'\ll\alpha\beta XYF;\ F=\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{q}+\frac{q}{XY}}.$$

Доказательство. Сначала оценим S.

1°. При $X\leqslant q$, $Y\leqslant q$ применим лемму 1, заменив в ней X и Y на α^2X и β^2Y. Получим

$$S\ll\sqrt{\alpha^2X\beta^2Yq}\ll\alpha\beta XYF.$$

2°. $X>q$, $Y\leqslant q$ сравнение $x\equiv x' \pmod q$, при данном x', выполняется $\ll\frac{X}{q}$ раз. Поэтому можно применить лемму 1, заменив в ней X и Y на $\left(\alpha\frac{X}{q}\right)^2q$ и β^2Y.

Получим

$$S \ll \sqrt{\alpha^2 \frac{X^2}{q} \beta^2 Y q} \ll \alpha\beta XYF.$$

3°. При $X \leqslant q, Y > q$ аналогичным путем найдем

$$S \ll \sqrt{\alpha^2 X \beta^2 \frac{Y^2}{q} q} \ll \alpha\beta XYF.$$

4°. При $X \leqslant q$, $Y > q$ аналогичным путем найдем

$$S \ll \sqrt{\alpha^2 \frac{X^2}{q} \beta^2 \frac{Y^2}{q} q} \ll \alpha\beta XYF.$$

Сумма S' оценивается так же, как и сумма S.

ЛЕММА 4. *Пусть q — простое, $q > 2$, $(k, q) = 1$, $\chi(a)$ — не главный характер по модулю q, x и y пробегают положительные целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям.*

Пусть далее $1 < U \leqslant N, U < U' \leqslant 2U$,

$$S = \sum_x \sum_y \xi(x) \eta(y) \chi(xy + k),$$

$$S' = \sum_x \sum_y \xi(x) \eta(y) \chi(xy(xy + k));$$

$$0 \leqslant \xi(x) \ll N^\varepsilon, \; 0 \leqslant \eta(y) \ll \eta N^\varepsilon,$$

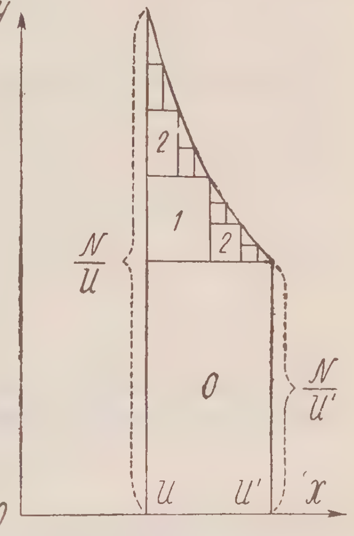
где суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U', \; xy \leqslant N. \qquad (1)$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon_0} F, \; S' \ll N^{1+\varepsilon_0} F;$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$



Доказательство. Сначала оценим S. Пусть r_0 — наибольшее целое с условием $2^{r_0} \leqslant \frac{1}{F}$. При этом будем считать, что $F \leqslant F_0$, где F_0 — достаточно малое положительное постоянное < 1; в противном случае лемма очевидна. Из области (1) выделим «нулевую», «первую», «вторые», «третьи», . . . , «r_0-е области», согласно схеме, указанной на прилагаемом чертеже. Здесь r-е области представляются прямоугольниками с основаниями длиною

$$\frac{u' - u}{2^r}.$$

Нулевая область — одна; число r-х областей при $r > 0$ будет 2^{r-1}. Согласно лемме 3, часть суммы S, отвечающая одной из r-х областей, будет

$$\ll \frac{u}{2^r} \frac{N}{u \cdot 2^r} N^{2\varepsilon} \sqrt{\frac{2^r}{u} + \frac{u \cdot 2^r}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q \cdot 2^{2r}}{N}} \ll \frac{N^{1+2\varepsilon}}{2^r} F.$$

Часть, отвечающая парам значений x, y, не принадлежащим ни одной из выделенных областей, будет

$$\ll N^{2\varepsilon}\frac{N}{u}\frac{u}{2^{r_0}}\ll N^{1+3\varepsilon}F.$$

Поэтому

$$S\ll N^{1+2\varepsilon}F\left(1+\sum_{r=1}^{r_0}\frac{2^{r-1}}{2^r}+1\right)\ll N^{1+3\varepsilon}F.$$

Сумма S' оценивается так же, как и сумма S.

ЛЕММА 5. *Пусть q — простое, $q>2$, $(k, q)=1$, $\chi(a)$ — не главный характер по модулю q; x, y, m пробегают не делящиеся на q целые положительные числа, принадлежащие трем возрастающим последовательностям. Пусть далее $1<U_1<U_2\leqslant N$,*

$$S=\sum_x\sum_y\sum_m\chi(xym+k),\quad S'=\sum_x\sum_y\sum_m\chi(xym(xym+k)),$$

где суммирование распространяется на область

$$u_1<x\leqslant u_2,\ xym\leqslant N,\ (x, y)=1.$$

Тогда имеем

$$S\ll N^{1+\varepsilon}F,\ S'\ll N^{1+\varepsilon}F;\ F=\sqrt{\frac{1}{u_1}+\frac{u_2}{N}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\ .$$

Доказательство. Имеем

$$S=\sum_d\mu(d)\,S_d$$

где d пробегает целые положительные числа, одновременно делящие числа хотя бы одной из возможных пар x, y; при этом

$$S_d=\sum_{x'}\sum_{y'}\sum_m\chi(x'y'm+k'),$$

где k' определяется сравнением $x\equiv k'd^2 \pmod q$, x', y' пробегают частные от деления на d значений x и y кратных d, причем суммирование распространяется на область

$$\frac{u_1}{d}<x'\leqslant\min\left(\frac{u_2}{d},\frac{N}{d^2}\right),\ x'y'm\leqslant\frac{N}{d^2}\ .$$

Эту область можно подразделить на $\ll\log N$ областей вида

$$\frac{u}{d}<x'\ll\frac{u'}{d}\,;\ x'y''\leqslant\frac{N}{d^2}, \tag{2}$$

где имеем

$$u_1\leqslant u<u'\leqslant\min\left(2u,\ u_2,\ \frac{N}{d}\right),\ y''=y'm.$$

Но при $N_1\leqslant N$ число пар y', m с условием $y'm=N_1$ будет $\ll N^\varepsilon$. Поэтому часть

$$S'_d=\sum\sum\chi(x'y''+k')$$

суммы S_d, отвечающая области (2), согласно лемме 4, будет $\left(\frac{N}{d^2}\right.$ вместо N, $\frac{u}{d}$ вместо $\left.u\right)$

$$\ll \left(\frac{N}{d^2}\right)^{1+\varepsilon_0} \sqrt{\frac{d}{u} + \frac{u d^2}{dN} + \frac{1}{q} + \frac{qd^2}{N}} \ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d} F.$$

Вместе с тем окажется

$$S_d \ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d} F \log N.$$

Но все значения d, одновременно делящие числа хотя бы одной из возможных пар x, y, не превосходят $\sqrt{N}$. Поэтому

$$S \ll N^{1+\varepsilon_0} F (\log N)^2.$$

Сумма S' оценивается так же, как и сумма S.

ЛЕММА 6. *Пусть $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное $\geqslant 55$; h — произвольное постоянное с условием $0 < h \leqslant \frac{1}{6}$; $0 \leqslant \gamma < 1$; $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{3}$; P — произведение некоторых простых чисел, не превосходящих N^{σ}; d пробегает все не превосходящие N делители числа P.*

Тогда значения d могут быть распределены среди $< D$ классов, где

$$D = (\log N)^{\frac{\log \log N}{\log (1+h)}}.$$

Часть этих классов включает только значения d с условием

$$d \leqslant N^{\gamma + h}.$$

Для каждого из остальных классов существует целое положительное H и две возрастающие последовательности (x) и (y) целых положительных чисел с условием

$$N^{\gamma} < x \leqslant N^{\gamma + \sigma + h}$$

такие, что все числа класса, взятые каждое H раз, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условиям

$$xy \leqslant N, \ (x, y) = 1.$$

Доказательство. Пусть τ — наибольшее целое число с условием

$$2^{(1+h)^{\tau-1}} < N^{\sigma}.$$

Тогда имеем

$$(1+h)^{\tau-1} \leqslant \frac{\log N}{3 \log 2}; \ \ \tau - 1 \leqslant \frac{\log \log N - \log 8}{\log (1+h)}; \ \ \tau < \frac{\log \log N}{\log (1+h)}.$$

Полагая $\nu = [\log N - 1]$, рассмотрим все ряды невозрастающих чисел

$$t_1, \ldots, t_{\nu}, \tag{3}$$

которые можно получить, выбирая каждое t_j среди чисел $\tau, \ldots, 1, 0$. Пусть l_s — число чисел ряда (3), равных s. Числами $l_{\tau}, \ldots, l_1$ ряд (3) определяется полностью. Число различных рядов (3) очевидно $< D$.

При $t_j > 0$ положим

$$\varphi_j = 2^{(1+h)^{t_j - 1}}, \quad F_j = 2^{(1+h)^{t_j}},$$

а при $t_j = 0$ положим

$$\varphi_j = 1, \quad F_j = 1.$$

Всякое d, будучи $\leqslant N$, как нетрудно видеть, является произведением $\leqslant \nu$ сомножителей; располагая их в порядке убывания и, если их число k меньше ν, полагая $p_{k+1} = \ldots = p_\nu = 1$, представим d в форме

$$d = p_1 \ldots p_\nu .$$

Среди рядов (3) найдется единственный ряд с условиями

$$\begin{aligned} \varphi_j < p_j \leqslant F_j \quad &\text{при} \quad t_j < 0, \\ \varphi_j = p_j = F_j \quad &\text{при} \quad t_j = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Совокупность значений d, связанных с одним и тем же рядом (3), назовем классом чисел d, связанных с рядом (3). Число классов чисел d следовательно будет $< D$.

Сначала рассмотрим класс чисел d, связанный с рядом (3), удовлетворяющим условию $\varphi_1 \ldots \varphi_\nu \leqslant N^\gamma$.

Имеем

$$d \leqslant F_1 \ldots F_\nu \leqslant N^{\gamma+h}.$$

Поэтому лемма для этого класса чисел верна.

Рассмотрим класс чисел d, связанный с рядом (3), удовлетворяющим условию $\varphi_1 \ldots \varphi_\nu > N^\gamma$. Пусть β — наименьшее число с условием $\varphi_1 \ldots \varphi_\beta > N^\gamma$.

Считая $\varphi_1 \ldots \varphi_{\beta-1} = 1$ при $\beta = 1$, находим

$$\varphi_1 \ldots \varphi_{\beta-1} N^\gamma, \quad \varphi_\beta < N^c, \quad \varphi_1 \ldots \varphi_\beta < N^{\gamma+c}, \quad F_1 \ldots F_\beta < N^{\gamma+c+h}.$$

Полагая $u = p_1 \ldots p_\beta$, $v = p_{\beta+1} \ldots p_\nu$, найдем

$$d = uv; \quad N^\gamma < u < N^{\gamma+c+h}.$$

Если $t_\beta > t_{\beta+1}$, то лемма для рассматриваемого класса чисел, очевидно, верна с $H = 1$, $x = u$, $y = v$.

Если $t_\beta = t_{\beta+1}$, то пусть $t_{\beta-k+1}, \ldots, t_\beta, t_{\beta-1}, \ldots, t_{\beta+k_2}$ — все значения t_j равные t_β. Пусть (x) — последовательность, состоящая из всех произведений $x = p_1, \ldots, p_\beta$, где $p_1, \ldots, p_\beta$ расположены в убывающем порядке и удовлетворяют условиям (4), а (y) — последовательность, состоящая из всех произведений $y = p_{\beta+1}, \ldots, p_\nu$, где простые из чисел $p_{\beta+1}, \ldots, p_\nu$ расположены в убывающем порядке и все эти числа удовлетворяют условиям (4). Пусть $H = \binom{k_1 + k_2}{k_1}$. Произведения xy с $(y, x) > 1$ отличны от произведений uv. При данных u и v равенство $xy = uv$ выполняется H раз с $(x, y) = 1$. Среди произведений xy с $(x, y) = 1$, найдутся все uv. Поэтому лемма для рассматриваемого класса чисел верна.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $N > 1$, q — простое, $q > 2$, $(k, q) = 1$, $\chi(a)$ не главный характер по модулю q, p пробегает простые числа,*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \chi(p+k), \quad S' = \sum_{p \leqslant N} \chi(p(p+k)).$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon}G, \quad S' \ll N^{1+\varepsilon}G; \quad G = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}.$$

Доказательство. Сначала оценим S. Можно ограничиться лишь случаем $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное $\geqslant 55$. Пусть h — произвольное постоянное с условием $0 < h \leqslant \frac{1}{6}$, P — произведение всех отличных от q простых чисел с условием $p \leqslant N^{\frac{1}{3}}$, Q — произведение всех отличных от q простых чисел с условием $N^{\frac{1}{3}} < p \leqslant N$. Находим ($p_1$ и p_2 пробегают простые числа)

$$\sum_{\substack{p_1 \setminus Q \\ p_1 p_2 \leqslant N}} \sum_{\substack{p_2 \setminus Q \\ (p_1, p_2) = 1}} \chi(p_1 p_2 + k) + S + O(N^{\frac{1}{3}}) = \sum_{d \setminus P} \sum_{\substack{dm \leqslant N \\ (m, q) = 1}} \mu(d)\chi(dm+k). \quad (5)$$

Все значения d, входящие в правую часть равенства (5), разобьем на классы, как указано в лемме 6, полагая $\gamma = \frac{1}{3}$, $\sigma = \frac{1}{3}$. Получим $\ll N^{\varepsilon'}$ классов; для чисел d одного и того же класса, $\mu(d)$ сохраняет одно и то же значение.

Сначала рассмотрим все классы, включающие только произведения d с условием $d \leqslant N^{\frac{1}{3}+h}$. Пусть d пробегает все числа указанных классов. Сумма соответствующих слагаемых правой части равенства (5) равна

$$\sum_{d} \sum_{dm \leqslant N} \mu(d)\chi(dm+k) - \sum_{d} \sum_{\substack{dm \leqslant N \\ (m, q) = q}} \mu(d)\chi(dm+k),$$

что будет

$$\ll \sum_{d} \sqrt{q} \log q + \sum_{d} \frac{N}{dq} \ll N^{\frac{1}{3}+h} \sqrt{q} \log q + \frac{N}{q} \log N \ll N^{1+\varepsilon}G.$$

Сумма слагаемых правой части равенства (5), отвечающих числам d одного из оставшихся классов, согласно леммам 6 и 5, будет

$$\ll N^{1+\varepsilon'} \sqrt{\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} + \frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon'+\frac{h}{2}} G.$$

Наконец, двойная сумма, стоящая в левой части равенства (5), согласно лемме 5, будет $\ll N^{1+\varepsilon'}G$.

Поэтому (ε', ε'', h достаточно малы) теорема для суммы S верна.

Теперь оценим S'. Применяя те же обозначения, что и при оценке S, имеем

$$\sum_{p_1 \searrow Q} \sum_{p_2 \searrow Q} \chi(p_1 p_2 (p_1 p_2 + k)) + S' + O(N^{\frac{1}{3}}) =$$
$$= \sum_{d \searrow P} \sum_{dm \leqslant N} \mu(d) \chi(dm(dm+k)). \qquad (6)$$

Все значения d, входящие в правую часть равенства (6), разобьем на классы так же, как и при оценке S.

Сначала рассмотрим все классы, включающие только произведения d с условием $d \leqslant N^{\frac{1}{3}+h}$. Сумма соответствующих слагаемых правой части равенства (6) равна

$$S_0 - S_1; \quad S_0 = \sum_{d}{}_0 \sum_{dm \leqslant N} \chi(dm(dm+k)), \quad S_1 = \sum_{d}{}_1 \sum_{dm \leqslant N} \chi(dm(dm+k)),$$

где в суммах, обозначенных символами $\sum_0$, $\sum_1$, d пробегает числа указанных классов, соответственно с четным и нечетным числом простых сомножителей.

Мы оценим лишь сумму S_0; сумма S_1 оценится аналогичным способом.

Пусть $G \leqslant G_0$, где G_0 — достаточно малое положительное постоянное < 1; в противном случае теорема очевидна. Пусть s_1 и s_2 — соответственно наибольшее и наименьшее целые числа с условиями

$$\frac{N}{q} > s_1, \quad s_2 > \frac{N}{N^{\frac{1}{3}-h}}.$$

Имеем $S_0 = S_0' + S_0''$, где

$$S_0' = \sum_{d \leqslant \frac{N}{s_2 q}}{}_0 \sum_{m \leqslant \left[\frac{N}{dq}\right] q} \chi(dm(dm+k)) + \sum_{\frac{N}{s_2 q} < d}{}_0 \sum_{m \leqslant \frac{N}{d}} \chi(dm(dm+k)).$$

Согласно леммам 2 и 5 имеем (считаем $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$)

$$S_0' \ll \sum_{d \leqslant \frac{N}{s_2 q}} \left[\frac{N}{dq}\right] \sqrt{q} + N^{1+\varepsilon_0} \sqrt{\frac{1}{\frac{N}{q} + N^{\frac{1}{3}+h}} + \frac{N^{\frac{1}{3}+h}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon} G.$$

Пусть $s_0 = \left[\frac{1}{G}\right]$ и пусть $S_0'' = S_2 + S_3$, где S_2 — часть суммы S_0'', содержащая слагаемые с условием $d < \frac{N}{s_0 q}$. Очевидно

$$S_2 \ll \frac{N}{s_0 q} q \ll NG.$$

Пусть $s_0 < s_2$ (в противном случае $S_3 = 0$). Тогда значения d, входящие в сумму S_3, принадлежат $s_0 - s_2$ интервалам

$$\frac{N}{sq} < d \leqslant \frac{N}{(s-1)q} \quad (s = s_0, s_0 - 1, \ldots, s_2 + 1).$$

Оценим часть T_s суммы S_3, отвечающую одному из этих интервалов.

Пусть r_0 — наибольшее целое с условием $2^{r_0} \leqslant \frac{1}{sG}$. Из области суммирования суммы T_s мы выделим «первую», «вторые», «третьи» ..., «r_0-е» области согласно схеме, аналогичной указанной на чертеже, которым мы пользовались при доказательстве леммы 4 $\left(\frac{N}{sq}\right.$ вместо u, $\frac{N}{(s-1)q}$ вместо u', q вместо $\left.\frac{N}{u}-\frac{N}{u'}\right)$. Здесь основания прямоугольников, представляющих r-е области, имеют длину

$$\frac{N}{(s-1)sq2^r};$$

высоты же этих прямоугольников очевидно будут

$$\ll \frac{q}{2^r}.$$

Число r-х областей равно 2^{r-1}. При этом

$$\frac{N}{(s-1)sq2^r} \geqslant \frac{NsG}{s^2q} \geqslant \frac{NG^2}{q} \geqslant 1; \quad \frac{q}{2^r} \geqslant qsG > \sqrt{q} > 1.$$

Поэтому часть суммы T_s, отвечающая одной из r-х областей, согласно лемме 3, будет

$$\ll \frac{N}{s^2q2^r}\frac{q}{2^r}\sqrt{\frac{s^2q2^r}{N}+\frac{2^r}{q}+\frac{1}{q}+\frac{q}{\frac{N}{s^2q2^r}\frac{q}{2^r}}} \ll \frac{N}{s2^r}G.$$

Часть суммы T_s, отвечающая парам значений d, m, не принадлежащим ни одной из выделенных областей, будет

$$\ll \frac{N}{s^2q2^{r_0}}q \ll \frac{NG}{s}.$$

Поэтому

$$T_s \ll \frac{NG}{s}\left(\sum_{r=1}^{r_0}\frac{2^{r-1}}{2^r}+1\right) \ll \frac{N\log N}{s}G; \quad S_3 \ll N^{1+\varepsilon}G.$$

Сумма слагаемых правой части равенства (6), отвечающая оставшимся классам значений d, а равным образом двойная сумма, стоящая в левой части равенства (6), оцениваются аналогично тому, как и при оценке S.

ЛЕММА 7. *Пусть* α *и* γ — *вещественные*, $\lambda \geqslant 1$, $\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta\lambda}{q^2}$, $(a, q)=1$, $q>0$, $U \geqslant 1$, $|\theta| \leqslant 1$, f — *целое*,

$$\Omega = \sum_{y=f}^{f+q-1}\min\left(U^2, \frac{1}{4(\alpha y+\gamma)^2}\right).$$

Тогда

$$\Omega \leqslant (\lambda+3)U^2+\min(q^2, 2qU).$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $q > \lambda+3$, в противном случае лемма очевидна. Полагая $y=f+z$, будем иметь

$$(\alpha y+\gamma) = \left(\frac{az+f(z)}{q}\right); \quad f(z) = \frac{\theta\lambda}{q}z+q(\alpha f+\gamma).$$

При некотором C, не зависящем от z, для всех $z=0, \ldots, q-1$ имеем $C < f(z) < C+\lambda$. Обозначая буквою ρ наименьший положительный вычет $az+[C]$ по модулю q и полагая $\delta=\{C\}$, имеем

$$(\alpha y+\gamma)=\left(\frac{\rho+\psi(\rho)}{q}\right); \quad \delta<\psi(\rho)<\delta+\lambda.$$

Слагаемые суммы Ω с $\rho=0$; $q-1, q-2, \ldots, q-[\delta+\lambda]-1$ заменим на U^2; оставшиеся слагаемые содержатся среди тех, которые получим, если числу ρ будем придавать пары значений

$$\rho=s; \quad q-[\delta+\lambda]-1-s,$$

беря

$$s=1, \ldots, \left[\frac{q-[\delta+\lambda]-1}{2}\right].$$

Для слагаемых с данным s очевидно

$$\left(\frac{\rho+\psi(\rho)}{q}\right) \geq \frac{s}{q}.$$

Поэтому

$$\Omega \leq (\lambda+3) U^2+\sum_{s=1}^{\infty} \min\left(2U^2, \frac{q^2}{2s^2}\right).$$

При $U \geq \frac{q}{2}$ отсюда имеем

$$\Omega < (\lambda+3) U^2+0{,}83q^2.$$

При $U < \frac{q}{2}$ найдем

$$\Omega < (\lambda+3) U^2+2U^2 \frac{q}{2U}+\int_{\frac{q}{2U}}^{\infty} \frac{q^2 ds}{2s^2} < (\lambda+3) U^2+2qU.$$

ЛЕММА 8. *Пусть*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta\lambda}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad q>0, \quad \lambda \geq 1, \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

Y — целое, $Y>0$ и y пробегает числа $y=1, \ldots, Y$. Тогда число решений неравенства

$$(\alpha y) \leq \frac{1}{q}$$

будет

$$< \left(\frac{Y}{q}+1\right)(\lambda+2).$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $q>\lambda+3$, в противном случае лемма очевидна. Интервал $0<y \leq Y$ разобьем на $< \frac{Y}{q}+1$ интервалов вида

$$f \leq y < f+q'; \quad 0<q' \leq q.$$

Числа (αy) находятся среди чисел

$$(\alpha y); \quad y=f, \ldots, f+q-1.$$

Последние, как было показано при выводе леммы 7, могут быть представлены числами вида

$$\left(\frac{\rho+\psi(\rho)}{q}\right); \quad \delta < \psi(\rho) < \delta+\lambda; \quad 0 \leq \delta < 1, \quad \rho = 0, 1, \ldots, q-1,$$

причем неравенство

$$\left(\frac{\rho+\psi(\rho)}{q}\right) \leq \frac{1}{q}$$

может осуществиться только при $\rho=0;\ q-1, \ldots, q-[\delta+\lambda]$.

ЛЕММА 9. *Пусть*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta\lambda}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad q>0, \quad \lambda \geq 1, \quad -1 \leq \theta \leq 1, \quad Y \leq \frac{q}{2\lambda}.$$

Тогда

$$\sum_{0<y\leq Y} \frac{1}{(\alpha y)} \ll q \log q.$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $q \geq 2$, $\lambda \leq \frac{q}{2}$; в противном случае лемма очевидна. Пусть ρ — наименьший положительный вычет ay по модулю q. Имеем

$$(\alpha y)=\left(\frac{\rho}{q}+\frac{\theta'(\rho)}{2q}\right); \quad |\theta'(\rho)| \leq 1.$$

Поэтому числа (αy) будут не меньше чисел, находящихся среди пар

$$\left(\frac{s-0{,}5}{q}\right), \quad \left(\frac{q-s+0{,}5}{q}\right),$$

где s пробегает значения

$$s=1, \ldots, \left[\frac{q}{2}\right].$$

Вместе с тем получим

$$\sum_{0<y\leq Y} \frac{1}{(\alpha y)} \leq 2 \sum_{s=1}^{\frac{q}{2}} \frac{q}{s-\frac{1}{2}} \ll \log q.$$

ЛЕММА 10. *Пусть f — целое, $U \geq 1$,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta\lambda}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad q>0, \quad \lambda \geq 1, \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

$$\Omega=\sum_{y=f+1}^{f+q} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha y)}\right).$$

Тогда имеем $\Omega \leq (\lambda+3) U+q \log q$.

Доказательство. Повторяя те же рассуждения, что и при выводе леммы 7, и полагая $q_0=\left[\frac{q}{2}-1\right]$, найдем здесь

$$\Omega \leq (\lambda+3) U+\sum_{s=1}^{q_0} \frac{q}{s} \leq (\lambda+3) U+q \sum_{s=1}^{q_0} \log \frac{2s+1}{2s-1}.$$

ЛЕММА 11. *Пусть* M, N, X, Y — *целые*, $X > 0$, $Y > 0$, $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta\lambda}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $q \geqslant Y$, $\lambda > 1$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$,

$$S = \sum_{x=M}^{M+X-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \xi(x)\eta(y) e^{2\pi i\alpha xy}; \quad \sum_{x=M}^{M+X-1} |\xi(x)|^2 \leqslant \xi; \quad \sum_{y=N}^{N+Y-1} |\eta(y)|^2 \leqslant \eta.$$

Тогда

$$S \ll \xi\eta \sqrt{Y\left((\lambda+3)2X^2 + \min(q^2, qX\sqrt{8})\right)}.$$

Доказательство. Имеем

$$|S|^2 \leqslant \xi^2 X \frac{1}{X} \sum_{x=M}^{M+X-1} \sum_{x_1=-X+1}^{X-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \sum_{y_1=N}^{N+Y-1} \eta(y)\overline{\eta(y_1)} e^{2\pi i\alpha(y-y_1)(x+x_1)} \leqslant$$

$$\leqslant \xi^2 \sum_{y=N}^{N+Y-1} \sum_{y_1=N}^{N+Y-1} \eta^2 \min\left(2X^2, \frac{1}{4(\alpha(y-y_1))^2}\right) <$$

$$< \xi^2\eta^2 Y\left((\lambda+3)2X^2 + \min(q^2, qX\sqrt{8})\right).$$

ЛЕММА 12. *Пусть* M, N, X, Y — *целые* $X > 0$, $Y > 0$, x *и* y *пробегают целые числа с условиями* $M < x \leqslant M+X$, $N < y \leqslant N+Y$, *принадлежащие двум возрастающим последовательностям.*

Пусть далее

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta\lambda}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0, \quad \lambda \geqslant 1, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

$$S = \sum_{x=M}^{M+X-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \xi(x)\eta(y) e^{2\pi i\alpha xy}; \quad 0 \leqslant \xi(x) \leqslant \xi, \quad 0 \leqslant \eta(y) \leqslant \eta.$$

Тогда имеем (очевидно X *и* Y *можно менять местами)*

$$S \ll \xi\eta XYF; \quad F = \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{\lambda}{Y} + \frac{\lambda}{q} + \frac{q}{XY}}.$$

Доказательство. 1°. При $Y \leqslant q$ можно применить лемму 11. Получим

$$S \ll \xi\eta\sqrt{Y(\lambda X^2 + qX)} \ll \xi\eta XYF.$$

2°. При $Y > q$ интервал $N \leqslant y < N+Y$ можно подразделить на $\ll \frac{Y}{q}$ интервалов вида $N_1 \leqslant y < N_1 + q'$; N_1 — целое, $q' \leqslant q$. Согласно 1°, соответствующая одному из таких интервалов часть суммы S будет

$$\ll \xi\eta\sqrt{q(\lambda X^2 + qX)} \ll \xi\eta XqF.$$

Поэтому

$$S \ll \frac{Y}{q}\xi\eta XqF \ll \xi\eta XYF.$$

ЛЕММА 13. *Пусть*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta\lambda}{q^2},\quad (a, q)=1,\quad q>0,\quad \lambda\geqslant 1,\qquad -1\leqslant\theta\leqslant 1,$$

x и y пробегают положительные целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям. Пусть далее

$$1<U\leqslant N,\quad U<U'\leqslant 2U,$$

$$S=\sum_x\sum_y \xi(x)\,\eta(y)\,e^{2\pi i\alpha xy};\qquad 0\leqslant\xi(x)\ll N^{\varepsilon},\quad 0\leqslant\eta(y)\ll N^{\varepsilon},$$

где суммирование распространяется на область

$$U<x\leqslant U',\quad xy\leqslant N. \tag{7}$$

Тогда имеем

$$S\ll N^{1+\varepsilon_0}F;\qquad F=\sqrt{\frac{1}{U}+\frac{U}{N}+\frac{\lambda}{\sqrt{N}}+\frac{\lambda}{q}+\frac{q}{N}}\,.$$

Доказательство. Пусть r_0 — наибольшее целое с условием $2^{r_0}\leqslant\frac{1}{F}$. При этом будем считать, что $F\leqslant F_0$, где F_0 — достаточно малое положительное постоянное <1. Из области (7) выделим «нулевую», «первую», «вторые», «третьи» . . . , «r-е» области, согласно той же схеме, как и при доказательстве леммы 4. Здесь r-е области представятся прямоугольниками с основаниями длиною

$$\frac{U'-U}{2^r}\,.$$

Нулевая область — одна. Число r-х областей при $r>0$ будет 2^{r-1}. Согласно лемме 12, часть суммы S, отвечающая одной из r-х областей, будет

$$\ll\frac{U}{2^r}\,\frac{N}{U\cdot 2^r}\,N^{2\varepsilon}\sqrt{\frac{2^r}{U}+\frac{U\cdot 2^r}{N}+\frac{\lambda\cdot 2^r}{\sqrt{N}}+\frac{\lambda}{q}+\frac{q\cdot 2^{2r}}{N}}\ll\frac{N^{1+2\varepsilon}}{2^r}F.$$

Часть, отвечающая парам значений x, y, не принадлежащих ни одной из выделенных областей, будет

$$\ll N^{2\varepsilon}\,\frac{N}{U}\,\frac{U}{2^r}\ll N^{1+2\varepsilon}F.$$

Поэтому

$$S\ll N^{1+\varepsilon_0}F\left(1+\sum_{r=1}^{r_0}\frac{2^{r-1}}{2^r}+1\right)\ll N^{1+3\varepsilon}F.$$

ЛЕММА 14. *Пусть*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta\lambda}{q^2},\quad (a, q)=1,\quad q>0,\quad \lambda\geqslant 1,\quad -1\leqslant\theta\leqslant 1,$$

x, y пробегают положительные целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям. Пусть далее $1<U_1<U_2\leqslant N$,

$$S=\sum_x\sum_y \xi(x)\,\eta(y)\,e^{2\pi i\alpha xy};\qquad 0\leqslant\xi(x)\ll N^{\varepsilon},\quad 0\leqslant\eta(y)\ll N^{\varepsilon},$$

где суммирование распространяется на область

$$U_1<x\leqslant U_2,\qquad xy\leqslant N. \tag{8}$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon_1} F; \qquad F = \sqrt{\frac{1}{U_1} + \frac{U_2}{N} + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

Доказательство. Область (8) можно подразделить на $\ll \log N$ областей вида

$$U < x \leqslant U', \qquad xy \leqslant N,$$

где $U' \leqslant 2U$. Применяя к одной из новых областей лемму 13, для отвечающей ей части S' суммы S имеем оценку

$$S' \ll N^{1+\varepsilon_0} \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{U}{N} + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

Отсюда лемма 14 следует непосредственно.

ЛЕММА 15. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta\lambda}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0, \quad \lambda \geqslant 1, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

u, x, y, v пробегают положительные целые числа, принадлежащие четырем возрастающим последовательностям. Пусть далее $1 < U \ll N$, $1 < X < N$,

$$S = \sum_u \sum_x \sum_y \sum_v \rho(u)\, \nu(v)\, e^{2\pi i \alpha uxyv}; \qquad 0 \leqslant \rho(u) \leqslant N^{\varepsilon}, \quad 0 \leqslant \nu(v) \leqslant N^{\varepsilon},$$

где суммирование распространяется на область вида

$$U \leqslant u \ll U^{1+\varepsilon}, \qquad X < x \leqslant X^{1+\varepsilon}, \qquad uxyv \leqslant N; \quad (x, y) = 1.$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon'} F; \qquad F = \sqrt{\frac{1}{UX} + \frac{UX}{N} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

Доказательство. Имеем

$$S = \sum_d \mu(d)\, S_d,$$

где d пробегает целые положительные числа, одновременно делящие числа хотя бы одной из возможных пар x, y; при этом

$$S_d = \sum_u \sum_{x'} \sum_{y'} \sum_v \rho(u)\, \nu(v)\, e^{2\pi i \alpha d^2 ux'y'v},$$

где x', y' пробегают частные от деления на d значений x, y у кратных d, причем суммирование распространяется на область вида

$$U_1 \leqslant u \ll U^{1+\varepsilon}, \quad \frac{X}{d} < x \leqslant \frac{X^{1+\varepsilon}}{d}, \quad ux'y'v \leqslant \frac{N}{d^2}.$$

Полагая $ux' = \xi$, $y'v = \eta$, убедимся, что сумма S_d может быть оценена согласно лемме 14, если взять $\frac{N}{d^2}$ вместо N, $\frac{UX}{d}$ вместо U_1, $C\frac{(UX)^{1+\varepsilon}}{d}$ (при некотором постоянном C) вместо U_2, ξ, η вместо x, y и αd^2 вместо α.

Имеем

$$\alpha d^2 = \frac{a_1}{q_1} + \frac{\theta\lambda_1}{q_1^2}; \qquad q_1 = \frac{q}{(d^2,\ q)}, \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda d^2}{(d^2,\ q)^2}.$$

Поэтому

$$S_d \ll \left(\frac{N}{d}\right)^{1+\varepsilon_0} \sqrt{\frac{d}{UX} + \frac{UXd^2}{N} + \frac{\lambda d^3}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda d^2}{q} + \frac{qd^2}{N}} \ll$$

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d} F + \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{\sqrt{d}} \sqrt{\frac{\lambda}{N}}. \qquad (9)$$

Представляя αd^2 в форме

$$\alpha d^2 = \frac{A}{Q} + \frac{\theta'}{Qq}, \quad (A,\ Q) = 1, \quad 1 < Q \leqslant q, \quad |\theta'| < 1, \qquad (10)$$

находим также

$$S_d \ll \left(\frac{N}{d}\right)^{1+\varepsilon_0} \sqrt{\frac{d}{UX} + \frac{UXd}{N} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{Q} + \frac{q}{N}} \ll \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d} F + \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{d^2\sqrt{Q}}. \qquad (11)$$

Все возможные значения d можно разместить среди $\ll \log N$ интервалов вида

$$2^k \leqslant d < \min(2^{k+1},\ \sqrt{N}). \qquad (12)$$

Точно так же все возможные значения Q, отвечающие различным d, можно разместить среди $\ll \log N$ интервалов вида

$$2^l \leqslant Q < \min(2^{l+1},\ q). \qquad (13)$$

Оценим сумму $T_{k,\,l}$ значений $|S_d|$ с условием, что d и Q лежат в данных интервалах (12) и (13), где

$$2^{2k}\, 2^l \geqslant q.$$

Из (10) следует $(\alpha d^2 Q) < \frac{1}{q}$; поэтому, согласно лемме 8, сумма $T_{k,\,l}$ имеет

$$\ll \frac{2^{2k}\, 2^l}{q} N^{\varepsilon}$$

слагаемых; к каждому из них можно применить оценку (11). Получим

$$T_{k,\,l} \ll 2^k \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{2^k} F + \frac{2^{2k}\, 2^l}{q} N^{\varepsilon} \frac{N^{1+\varepsilon_0}}{2^{2k}\sqrt{2^l}} \ll N^{1+\varepsilon_2} F.$$

Теперь оценим сумму T' всех $|S_d|$, где

$$d^2 Q < q.$$

Согласно лемме 8, сумма T' имеет $\ll \lambda N^{\varepsilon}$ слагаемых, к каждому из которых можно применить оценку (9). Получим

$$T' \ll N^{1+\varepsilon_0} F \log N + N^{1+\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\lambda}{N}} \sum_d \frac{1}{\sqrt{d}} \ll N^{1+\varepsilon'} F.$$

Найденные для $T_{k,\,l}$ и T' оценки и доказывают лемму.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $N \geqslant 2$, $\lambda \geqslant 1$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta\lambda}{q^2}; \quad (a,\ q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

p пробегает простые числа. Тогда

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p} \ll N^{1+\varepsilon} G; \qquad G = \sqrt{\frac{\lambda}{q} + \frac{q}{N} + \frac{\lambda^2}{q}} + \lambda N^{-0{,}25} + N^{-0{,}2}.$$

Доказательство. Пусть $1 < H < N$, p — произведение простых чисел с условием $p \leqslant H$, Q — произведение простых чисел с условием $H < p \leqslant N$, r_0 — наибольшее целое с условием $H^{r_0} \leqslant N$. При целом положительном $r \leqslant r_0$ имеем

$$\sum_{\substack{y_1 \setminus Q \\ y_1 \ldots y_r \leqslant N}} \ldots \sum_{y_r \setminus Q} e^{2\pi i \alpha y_1 \ldots y_r} = W_r;$$

$$W_r = \sum_{\substack{d_1 \\ d_1 m_1 \ldots d_r m_r \leqslant N}} \sum_{m_1} \ldots \sum_{d_r} \sum_{m_r} \mu(d_1) \ldots \mu(d_r) e^{2\pi i \alpha d_1 m_1 \ldots d_r m_r}.$$

Полагая ($p_1, \ldots, p_k$ пробегают простые числа; произведения, отличающиеся порядком сомножителей, не считаются различными)

$$S_k = \sum_{\substack{p_1 \setminus Q \\ p_1 \ldots p_k \leqslant N}} \ldots \sum_{p_k \setminus Q} e^{2\pi i \alpha p_1 \ldots p_k},$$

имеем

$$rS_1 + r^2 S_2 + \ldots + r^{r_0 - 1} S_{r_0 - 1} = W_r + O\left(\frac{N}{H}\right).$$

В частности при $H = N^{0,2}$ имеем $r_0 = 5$ и

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = W_1 + O(N^{0,8}),$$

$$S_1 + 2S_2 + 4S_3 + 8S_4 = \frac{W_2}{2} + O(N^{0,8}),$$

$$S_1 + 3S_2 + 9S_3 + 27S_4 = \frac{W_3}{3} + O(N^{0,8}),$$

$$S_1 + 4S_2 + 16S_3 + 64S_4 = \frac{W_4}{4} + O(N^{0,8}).$$

Поэтому

$$S_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} W_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta} W_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta} W_3 - \frac{\Delta_4}{\Delta} W_4 + O(N^{0,8}),$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ — отвечающие элементам первого столбца миноры определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}.$$

Ограничимся лишь оценкой W_4, так как W_1, W_2, W_3 оценятся аналогичным способом. При всяком $t = 1, 2, 3, 4$ все значения d_t распределятся среди $< D$ классов, согласно лемме 6, а все значения m_t распределятся среди $\ll \log N$ интервалов вида

$$M_t \leqslant m_t < M_t'; \qquad M_t' \leqslant 2M.$$

Оценим часть T суммы W_4, отвечающую каким-либо четырем классам значений d_1, d_2, d_3, d_4 и четырем интервалам значений m_1, m_2, m_3, m_4. Пусть эти классы и интервалы определяются неравенствами

$$\varphi^{(1)} < d_1 \leqslant F^{(1)}, \quad \varphi^{(2)} < d_2 \leqslant F^{(2)}, \quad \varphi^{(3)} < d_3 \leqslant F^{(3)}, \quad \varphi^{(4)} \leqslant d_4 < F^{(4)},$$

$$M_1 \leqslant m_1 < M_1', \quad M_2 \leqslant m_2 < M_2', \quad M_3 \leqslant m_3 < M_3', \quad M_4 \leqslant m_4 < M_4',$$

где имеем

$$\varphi^{(t)} = \varphi_{1,t} \dots \varphi_{\nu,t}, \qquad F^{(t)}_{1,t} \dots F_{\nu,t}.$$

Пусть одно из чисел M_1, M_2, M_3, M_4 будет $> N^{0,2}$; для определенности пусть $M_4 > N^{0,2}$.

Полагая $d_1 d_2 d_3 d_4\, m_1 m_2 m_3 = z$, имеем

$$T = \sum_{z} \sum_{zm_4 \leqslant N} e^{2\pi i \alpha z m_4}.$$

Очевидно, z пробегает значения с условием

$$K < z < 8K^{1+h}; \quad K = \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)}\, M_1 M_2 M_3,$$

причем при целом z_0 число решений уравнения $z = z_0$ будет $\ll N^{\varepsilon_1}$. Очевидно, достаточно рассматривать случай $K \leqslant N^{0,8}$; в противном случае $T = 0$. Имеем

$$T \ll N^{\varepsilon_1} \sum_{u=1}^{8K^{1+h}} \min\left(\frac{N}{u}, \frac{1}{2(\alpha u)}\right).$$

Разбивая интервал $0 < u \leqslant 8K^{1+h}$ на интервалы

$$0 < u \leqslant \frac{q}{2\lambda}, \quad \frac{q}{2\lambda} < u \leqslant \frac{q}{2\lambda} + q, \quad \frac{q}{2\lambda} + q < u \leqslant \frac{q}{2\lambda} + 2q, \; \dots$$

и применяя леммы 9 и 10, получим

$$T \ll N^{\varepsilon_1}\left[\left(\frac{K^{1+h}}{q} + 1\right) q \log q + \frac{N\lambda^2}{q} + \frac{\lambda N}{q} \log N\right] \ll N^{1+\varepsilon_2} G.$$

Теперь допустим, что M_1, M_2, M_3, M_4 не превосходят $N^{0,2}$, а $M_1 M_2 M_3 M_4 \geqslant N^{0,4}$. Пусть t — наименьшее целое с условием $M_1 \dots \dots M_t \geqslant N^{0,4}$; имеем $N^{0,4} \leqslant M_1 \dots M_t \leqslant N^{0,6}$. Положим

$$u = m_1 \dots m_t, \qquad v = m_{t+1} \dots m_4 d_1 d_2 d_3 d_4.$$

Число решений каждого из уравнений $u = u_0$, $v = v_0$ будет $\ll N^{\varepsilon_1}$. Имеем

$$T = \sum_{u} \sum_{uv \leqslant N} e^{2\pi i \alpha uv}.$$

Применяя лемму 15, получим $(x = y = 1)$

$$T \ll N^{1+\varepsilon_2} \sqrt{\frac{1}{N^{0,4}} + \frac{\lambda^2}{N^{0,5}} + \frac{\lambda}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon_2} G.$$

Если $M_1 M_2 M_3 M_4 \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} \leqslant N^{0,8}$, то, очевидно

$$T \ll N^{1+\varepsilon_2} G.$$

Остается рассмотреть случай, когда

$$M_1 M_2 M_3 M_4 < N^{0,4}, \qquad M_1 M_2 M_3 M_4 \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} > N^{0,8}.$$

Пусть t — наименьшее целое с условием $M_1 \dots M_t > N^{0,4}$ и пусть

$$\frac{N^{0,4}}{M_1 M_2 M_3 M_4\, \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(t-1)}} = N^{\gamma}; \qquad 0,2 = \sigma.$$

При некотором X с условием $N^{\gamma} \leqslant X \leqslant N^{\gamma+\sigma}$ существуют две возрастающих последовательности (x) и (y) целых положительных чисел с условием (доказательство леммы 6) $X \leqslant x \leqslant X^{1+h}$ такие, что все числа класса, взятые каждое H раз, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y) = 1$. При этом, полагая

$$u = m_1 m_2 m_3 m_4 d_1 \dots d_{t-1}, \qquad v = d_{t+1} \dots d_4, \qquad u = N^{0,4-\gamma},$$

будем иметь

$$N^{0,4} \leqslant XU \leqslant N^{0,6+h},$$

причем будут выполнены условия леммы 15.

Поэтому получим

$$T \ll N^{1+\varepsilon_2} \sqrt{\frac{1}{N^{0,4}} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{N}} + \frac{\lambda}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon_2} G.$$

Из всего доказанного следует

$$W_4 \ll N^{1+\varepsilon} G.$$

Таким образом теорему можно считать доказанной.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $N \geqslant 2$, $0 < \sigma < 1$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

p пробегает простые числа, не превосходящие N. Тогда для числа T дробей $\{\alpha p\}$ *с условием*

$$0 \leqslant \{\alpha p\} < \sigma$$

имеем

$$T - \sigma\pi(N) \ll N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right).$$

Доказательство. Теорема выводится из теоремы 2, аналогично тому, как в моих прежних работах выводились теоремы, уточнением которых является теорема 3.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
17 X 1942

I. M. VINOGRADOW. AN IMPROVEMENT OF THE ESTIMATION OF SUMS WITH PRIMES

SUMMARY

By means of an improvement of my method of 1934—1937 it is possible to make more precise some of the results obtained earlier by this method, in particular, the following theorems are true.

THEOREM 1. *If* $N > 1$, *q is a prime*, $q > 2$, $(k, q) = 1$, $\chi(a)$ *is a non-principal character modulo q, p runs through the primes*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \chi(p+k), \qquad S' = \sum_{p \leqslant N} \chi(p(p+k)),$$

then

$$S \ll N^{1+\varepsilon} G, \quad S' \ll N^{1+\varepsilon} G; \quad G = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}.$$

THEOREM 2. *Let be* $N \geqslant 2$, $0 < \sigma < 1$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

p runs over the primes not exceeding N. Then for the number T of fractions $\{\alpha p\}$ *satisfying the condition*

$$0 \leqslant \{\alpha p\} < \sigma$$

we have

$$T - \sigma\pi(N) \ll N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 7 (1943), 35–48 Série mathématique

Н. С. ПИСКУНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ *

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе доказывается существование решений уравнений теории пограничного слоя в случае, если давление на контуре есть невозрастающая функция аргумента. Из метода доказательства следует способ построения решений.

Изучение движения жидкости в пограничном слое, как известно, сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где v_x и v_y — искомые функции, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} &v_x = v_y = 0 && \text{при } y = 0, \\ &v_x = U && \text{при } y = \infty, \\ &v_x = v_0(x, y) && \text{при } t = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь U — скорость потенциального потока, p — давление в потенциальном потоке на контуре, и следовательно, являются известными функциями.

Будем в дальнейшем предполагать движение установившимся. В этом случае Мизес свел систему уравнений (1) к одному уравнению следующим образом. Последнее из уравнений (1) показывает, что можно принять

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Будем считать $\psi(x, 0) = 0$. Полагаем далее x и ψ независимыми переменными. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} v_x(x, y) = \bar{v}_x(x, \psi), \\ v_y(x, y) = \bar{v}_y(x, \psi). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Уравнение (1) примет вид

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \bar{v}_x \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left(\frac{\bar{v}_x^2}{2}\right). \qquad (4)$$

---

* Краткое изложение этой работы опубликовано в Докладах Акад. Наук СССР, XXVII (1940).

Но $p+\frac{U^2}{2}=\text{const}$, и уравнение (4) можно переписать так:

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x}=\frac{dU^2}{\partial x}+\bar{v}_x\frac{\partial^2 \bar{v}_x^2}{\partial\psi^2}. \tag{5}$$

Введя $u=U^2-\bar{v}_x^2$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{U^2-u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$u(x,0)=U^2(x),\qquad u(x,\infty)=0,\qquad u(0,\psi)=\varphi(\psi). \tag{7}$$

Будем в дальнейшем считать, что $U^2(x)=\theta(x)$, где $\theta(x)$ — непрерывная неубывающая функция своего аргумента.

Если дано $v_x(0, y)$, то

$$\psi=\int_0^y v_x(0,y)\,dy.$$

Из этого соотношения найдем зависимость y от ψ и затем определим $\varphi(\psi)$ по формуле

$$u(0,\psi)=U^2(0)-v_x^2(0,\psi).$$

Найдя $u(x,\psi)$, определим $\bar{v}_x(x,\psi)=\sqrt{U^2-u(x,y)}$ и из соотношения

$$y=\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{U^2-u}}$$

определим $\psi(v, y)$ [1].

Задачей настоящей работы является установление существования решения уравнения (6) с краевыми условиями (7) и способ его построения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть имеем уравнение**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{\theta(x)-u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{6}$$

*которое имеет решение в области*** $A\{x\leqslant X,\ -R\leqslant y\leqslant R\}$. *Тогда модули производных*

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},\ \ldots$$

внутри области могут быть оценены через максимум решения в данной области независимо от характера начальных данных.

* Здесь и в дальнейшем y обозначает то же, что в предыдущем параграфе было обозначено через ψ.

** Доказательство этой теоремы проводится аналогично тому, как это делал С. Н. Бернштейн [2].

Доказательство. Пусть в замкнутой области A

$$|u| < \theta(x) < B.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w = \sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)\cdot\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| + e^{mu},$$

где $x_1 = x - x_0$, $x_0 > 0$, $R_1 < R$. Рассмотрим значение функции w в области $A_1\{x_0 \leqslant x \leqslant X,\ |y| \leqslant R_1\}$. Очевидно, что если w достигает максимума там, где $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, или на границе области A_1, то $w < e^{mB}$, где m — постоянная, которая будет определена в дальнейшем.

Допустим, что w достигает максимума внутри области и там, где $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$. Тогда в этой точке будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial x} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \leqslant 0.$$

Найдем производные от w:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \pm\sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \mp 2\sqrt{x_1}\,y\,\frac{\partial u}{\partial y} + me^{mu}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \pm\sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \mp 4\sqrt{x_1}\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \mp 2\sqrt{x_1}\,\frac{\partial u}{\partial y} + $$
$$+ m^2 e^{mu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + me^{mu}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Верхние знаки ставятся в том случае, если в точке максимума $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$, и нижние, если $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$. Далее,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \pm\frac{(R_1^2 - y^2)}{2\sqrt{x_1}}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \pm \sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + me^{mu}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Очевидно, в точке максимума будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\sqrt{x_1}\,y \mp me^{mu}}{\sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Далее, из уравнения (6) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \sqrt{\theta - u}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{1}{2\sqrt{\theta - u}}\,\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим далее выражение

$$\sqrt{\theta - u}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial x} = \sqrt{\theta - u}\left[\pm\sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \mp 4\sqrt{x_1}\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \mp\right.$$
$$\left.\mp 2\sqrt{x_1}\,\frac{\partial u}{\partial y} + m^2 e^{mu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + me^{mu}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] - \left[\pm\frac{(R_1^2 - y^2)}{2\sqrt{x_1}}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{x_1}\,(R_1^2 - y^2)\left(\sqrt{\theta - u}\,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{1}{2\sqrt{\theta - u}}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - me^{mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right] \leqslant 0.$$

Подставляя вместо $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ его выражение и приводя подобные члены. получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left[m^2 e^{mu}\sqrt{\theta-u} \pm \frac{\sqrt{x_1}\,(R_1^2-y^2)}{2\sqrt{\theta-u}}\,\frac{(2\sqrt{x_1}\,y \mp me^{mu})}{\sqrt{x_1}\,(R_1^2-y^2)}\right]+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{2\sqrt{x_1}\,y \mp me^{mu}}{\sqrt{x_1}\,(R_1^2-y^2)}(\mp 4\sqrt{x_1}\,y+me^{mu})\sqrt{\theta-u}+2\sqrt{x_1}\sqrt{\theta-u}\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{(R_1^2-y^2)}{2\sqrt{x_1}}+me^{mu}\right]\leqslant 0.$$

Подберем m так, чтобы первая квадратная скобка была положительна. Тогда в точке $\max w$ будем иметь

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{K}{\sqrt{x_1}\,(R_1^2-y^2)},$$

где K зависит только от размеров области. В точке максимума w будем иметь

$$\sqrt{x_1}\,(R_1^2-y^2)\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|+e^{mu} < M_1.$$

Для любой точки области получаем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{M}{\sqrt{x_1}\,(R_1^2-y^2)}, \tag{8}$$

где M зависит только от размеров области.

Для оценки $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|$ рассматриваем функцию

$$w_1=\sqrt{x_2}\,(R_2^2-y^2)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|+e^m\frac{\partial u}{\partial y},$$

где $x_1=x-\bar{x}_0$, $\bar{x}_0>x_0$, $R_2<R_1$ в области $A_2\{\bar{x}_0\leqslant x\leqslant X,\ |y|\leqslant R_2\}$.

Если обозначим $u'=\frac{\partial u}{\partial y}$, то u' удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u'}{\partial x}=\sqrt{\theta-u}\,\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}-\frac{u'}{\sqrt{\theta-u}}\,\frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Дальнейшие рассуждения не будут отличаться от предыдущих. Таким образом, теорема доказана.

ЛЕММА 1. *Решения уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial x}a \quad (a>0), \tag{9}$$

удовлетворяющее условию $u(0,\ y)=\varphi(y)$, $u(x,\infty)=0$, $u(x,0)=1$, *где* $\varphi''(y)\geqslant 0$, $\varphi(0)=\theta(0)$, *удовлетворяет соотношению* $\frac{\partial u}{\partial y}\geqslant 0$ *всюду в области существования решения.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно предполагать, что

$$\frac{1}{a}\varphi''(0)=\theta'(0),$$

$$\lim_{y\to\infty}\varphi'(y)=\lim_{y\to\infty}\varphi''(y), \qquad \varphi^{IV}(y) \quad \text{существует},$$

так как в противном случае мы построили бы последовательность $\varphi_n(y)$, сходящуюся к $\varphi(y)$ и удовлетворяющую указанным условиям. Решение уравнения (9) аппроксимируется решениями системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u_{\nu+1}}{\partial y^2} = \frac{u_{\nu+1} - u_\nu}{h} a_\nu, \qquad (9')$$

где $u_0 = \varphi(y)$, $u_\nu(0) = \theta(\nu h)$, $u_\nu(\infty) = 0$.

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad h = \frac{x}{n}.$$

Но очевидно, что $u_{\nu+1} \geqslant u_\nu$. Отсюда и следует справедливость высказанного утверждения.

Замечание. Формулированная лемма справедлива для уравнения (6), если его решение аппроксимируется решениями системы, аналогичной системе (9′), или является пределом последовательности решений которые аппроксимируются решениями системы, аналогичной (9′).

ТЕОРЕМА 2. *Существует решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (6)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \bar{\varphi}(y); \; u(x, 0) = k(x) < \theta(x); \; u(x, \infty) = 0,$$

где

$$\bar{\varphi}''(0) = \frac{k'(0)}{\sqrt{\theta(0) - k(0)}}; \quad \lim \bar{\varphi}'(y) = \lim_{y \to \infty} \bar{\varphi}''(y) = \lim \bar{\varphi}(y) = 0;$$

$\varphi(y) < \theta(0)$; $\bar{\varphi}(0) = k(0)$; $\bar{\varphi}^{IV}(0)$ *существует*; $k(x)$ — *непрерывная функция.*

Доказательство этой теоремы легко проводится методом, применяемым Rothe [2] при решении линейного уравнения параболического типа и автором [4].

ЛЕММА 2. *Решения уравнений*

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_2}} \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} a,$$

где

$$a = \min \frac{1}{\sqrt{\theta(x)}},$$

при условиях

$$u_2(0, y) \leqslant u_1(0, y) = \varphi(y) \geqslant 0; \quad u_2(x, 0) \leqslant u_1(x, 0) = \theta(x);$$
$$u_2(x, \infty) \leqslant u_1(x, \infty) = 0,$$

где

$$\varphi''(y) \geqslant 0,$$

удовлетворяют соотношениям $u_2 \leqslant u_1$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение для разности $u_2 - u_1$;

$$\frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_2}} \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}} \quad 1 \right]$$

на границе области $u_2 - u_1$. Так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad u_2 \geqslant 0, \quad \text{то} \quad u_2 - u_0 \leqslant 0.$$

ЛЕММА 3. *Последовательность решений уравнения* (6) *неубывающая, если последовательность начальных функций возрастающая.*

Доказательство. Рассмотрим два решения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial u_2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_2}} \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

где $u_1 > u_2$ всюду на границе области.

Составим уравнение для разности $u_2 - u_1$:

$$\frac{\partial^2 (u_1 - u_2)}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} + \\ + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{(u_1 - u_2)}{\sqrt{\theta - u_1}\sqrt{\theta - u_2}\,(\sqrt{\theta - u_1} + \sqrt{\theta - u_2})} \tag{10}$$

Допустим, что существует область, где $u_1 - u_2 < 0$: пусть в этой области

$$\max 2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}\sqrt{\theta - u_2}\,(\sqrt{\theta - u_1} + \sqrt{\theta - u_2})} \right| = c.$$

Сделаем преобразование $u_1 - u_2 = we^{cx}$; w будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + w \left[\frac{c}{\sqrt{\theta - u_1}} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}\sqrt{\theta - u_2}\,(\sqrt{\theta - u_1} + \sqrt{\theta - u_2})} \right].$$

Там, где $u_1 - u_2 < 0$, также $w < 0$. Следовательно, разность $u_1 - u_2$ имеет отрицательный минимум, что невозможно. Таким образом, справедливость леммы доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Существует решение уравнения* (6), *удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = \varphi(y); \quad u(x, 0) = \theta(x); \quad \lim_{y \to \infty} u(x, y) = 0, \tag{11}$$

где $\varphi(y)$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:*

1° $\varphi(0) = \theta(0), \quad \lim_{y \to \infty} \varphi(y) = 0, \quad \theta(0) > \varphi(y) > 0$ при $y > 0$,

2° $\varphi(y) \leqslant \theta(0) - ky$ при $y < k_1$,

где k и k_1 — *произвольно малые постоянные.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность пар функций

$$\{\psi_n(x) = k_n, \quad \varphi_n(y)\},$$

где

$$\varphi_n(0) = k_n^{(0)}, \quad \varphi_n''(0) = \frac{k_n'(0)}{\sqrt{\theta(0) - k_n(0)}}; \quad \varphi_n(y) \quad \text{и} \quad k_n(x)$$

удовлетворяют условиям теоремы 2. Очевидно, что построить такую последовательность можно.

Обозначим совокупность этих функций через $f_n(s)$. Пусть

$$f_n(s) < f_{n+1}(s), \qquad \lim_{n\to\infty} k_n = \theta(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \varphi(y).$$

Для каждой $f_n(s)$ строим решение уравнения (6). Обозначим его через $u_n(x, y)$. На основании леммы 3 имеем

$$u_{n+1}(x, y) \geqslant u_n(x, y).$$

Получаем, таким образом, последовательность решений, монотонно неубывающую

$$u_1(x, y) \leqslant u_2(x, y) \leqslant \ldots \leqslant u_n(x, y) \leqslant \ldots$$

На основании лемм 2 и 3 видим, что последовательность функций ограничена сверху решением теплового уравнения при краевой функции $\bar{\varphi}(y)$, удовлетворяющей условиям $\bar{\varphi}(y) \geqslant \varphi(y)$, $\bar{\varphi}''(y) \geqslant 0$. Таким образом, последовательность решений $u_n(x, y)$ сходится,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y).$$

На основании теоремы 1 замечаем, что все функции $u_n(x, y)$ имеют ограниченные производные во всякой внутренней области. Отсюда следует, что $u(x, y)$ имеет ограниченные производные во всякой внутренней области и удовлетворяет дифференциальному уравнению (6).

Докажем, что $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (11), Очевидно, что

$$\lim_{y\to\infty} u(x, y) = \theta(x) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0.$$

Докажем далее, что

$$\lim_{x\to 0} u(x, y) = \varphi(y).$$

Как указывалось, на основании леммы 2 замечаем, что все $u_n(x, y) < M$ внутри области. С другой стороны, так как последовательность $u_n(x, y)$ неубывающая, то $\lim\limits_{x\to 0} u(x, y) \geqslant \varphi(y)$.

Возьмем произвольную точку $y = y_0$. Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} u(x, y_0) = \varphi(y_0).$$

Рассмотрим области $D\{x \leqslant a,\ y_0 - \alpha \leqslant y \leqslant y_0 + a\}$, где a и α — некоторые достаточно малые числа. Построим далее функцию $\varphi^*(y)$ при $y_0 - \alpha \leqslant y \leqslant y_0 + \alpha$, удовлетворяющую следующим условиям: $\varphi^*(y) > \varphi(y)$ и при $y \neq y_0$, $\varphi^*(y) = \varphi(y_0)$, $\varphi''(y) \geqslant 0$, $\varphi^*(y_0 - \alpha) = \varphi^*(y_0 + \alpha) = M$. На прямых $y = y_0 - \alpha$ и $y = y_0 + \alpha$ построим функции

$$\psi_1(x) = M \quad \text{и} \quad \psi_2(x) = M.$$

По функциям φ^*, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ строим в области D решение уравнения (9). Обозначим его через $u^*(x, y)$. Очевидно, что $u^*(x, y) \geqslant u_n(x, y)$ при всех n. Следовательно $u^*(x, y) \geqslant u(x, y)$. Но $\lim\limits_{x \to 0} u^*(x, y_0) = \varphi(y_0)$, откуда следует, что $\lim\limits_{x \to 0} u(x, y_0) = \varphi(y_0)$. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Если два решения уравнения* (6) $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ *удовлетворяют условиям*

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \theta(x);$$

$$u_2(x, \infty) \leqslant u_1(x, \infty) = 0;$$

$$u_2(0, y) < u_1(0, y) = \varphi(y), \quad u_1''(0, y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad y < \varepsilon, \tag{11'}$$

где ε — *некоторое произвольно малое, положительное число, то* $u_2(x, y) \leqslant u_1(x, y)$ при $x \leqslant a > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{\varphi}(y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\bar{\varphi}''(y) \geqslant 0; \quad \bar{\varphi}(y) < \varphi(y) \quad \text{при} \quad y \leqslant \varepsilon; \quad \bar{\varphi}(y) > u_2(0, y) \quad \text{при} \quad 0 < y.$$

Построим решение $v(x, y)$, удовлетворяющее условиям

$$v(x, 0) = \theta(x); \quad v(0, y) = \bar{\varphi}(y); \quad v(x, \infty) = 0.$$

На основании замечания к лемме 1 $\frac{\partial v}{\partial x} \geqslant 0$ всюду в области. Очевидно, что $u_1(x, y) > v(x, y)$ в некоторой области, примыкающей к оси OY.

Пусть далее $u_2(x, y) > u_1(x, y)$ в некоторой области.

Рассмотрим кривую $u_2(x, y) = u_1(x, y)$. Очевидно, она такова, что никакая ее часть вместе с некоторой прямой $x = x_0$ не может ограничить часть плоскости, так как это противоречило бы теореме единственности в случае ограниченности производных от решений.

Пусть кривая пересекает границу рассматриваемой области $x = X$; тогда она также должна пересечь ось OX или уйти в бесконечность.

Докажем, что в бесконечность она уйти не может. Предположим обратное. Обозначим эту кривую через Г. Рассмотрим область D, ограниченную кривой Г и прямой $x = X$. Обе указанные кривые уходят в бесконечность; $u_1 = u_2$ на Г и в бесконечности (если $u_2 < u_1$ в бесконечности, то утверждение очевидно).

Разность $u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (10)

$$\frac{\partial^2 (u_1 - u_2)}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u_1}} \cdot \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{u_1 - u_2}{k}.$$

Пусть, например $u_1 - u_2 > 0$ в указанной области. Проведем прямую $y = l$, пересекающую нашу область. Через каждую точку отрезка $y = l$ проводим прямую параллельную оси OY в области $y < l$ до пересечения с кривой Г, в области $y > l$ до точки P, в которой значение функции будет равно половине положительного максимума значения функции $u_1 - u_2$ на этом отрезке.

Совокупность точек P образует непрерывную кривую, пересекающую кривую Г и прямую $x = X$. Обозначим ее через $Г_1$. Рассмотрим область, ограниченную кривыми $Г + Г_1$. Обозначим ее через D. Пусть $u_1 - u_2 = w$. Будем рассматривать u_1, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, k как известные функции; w удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{0 - u_1}} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{1}{k} w.$$

Сделаем преобразование $w = \bar{w} e^{cx}$, где

$$c = \max 2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{1}{k_2} \right),$$

$\bar{w}$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u_1}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{1}{k} + \frac{c}{\sqrt{0 - u_1}} \right].$$

Если $\bar{w} \neq 0$, то оно должно иметь положительный максимум внутри области. Но это невозможно. Аналогично можно доказать утверждение в случае, если область D ограничена двумя кривыми, уходящими в бесконечность.

Таким образом, кривая Г должна пересечь ось OX в начале координат. Так как $\bar{\varphi}(y) \geq u_2(0, y)$, то $v > u_2$. Точно так же существует около оси OY область, где $v < u_1$. Кривая $v = u_1$ не может пересекать ось OX при $x > 0$, так как тогда существовала бы область, примыкающая к оси OX, где $u_1 < u_2$, $v < u_1$. Следовательно, $v < u_2$, а это невозможно.

Кривая $v = u_1$ не может проходить и через начало координат, так как в этом случае имели бы в некоторой области $v = u_1$; $v > u_2$; $u_1 < u_2$, но и это невозможно.

Таким образом, кривой Г не существует и $u_1(x, y) \geq u_2(x, y)$.

Пусть имеем область $D\{x \leq X,\ y \leq M\}$.

Пусть на границе области (на прямых $y=0$, $x=0$, $y=M$) определены функции $\{f_n(s)\}$. Каждой $f_n(s)$ поставлено в соответствие семейство $\{u_n(x, y)\}$ функций, удовлетворяющих условиям: 1) на границе области они совпадают с $f_n(s)$, 2) они равностепенно непрерывны для всех $f_n(s)$, 3) $\inf\{u_n(x, y)\} \geqslant \sup\{u_{n'}(x, y)\}$, если $f_n(s) \geqslant f_{n'}(s)$. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА 4. *Для всякого* ε *найдется* $\delta > 0$ *такое, что* $\sup\{u_{n'}(x, y)\} - \inf\{u_{n'}(x, y)\} \leqslant \varepsilon$, *если* $|f_n^*(s) - f_{n'}(s)| < \delta$, f_n^* — *фиксированная функция.*

Доказательство. Пусть

$$f_n^*(s) > f_{n'}(s).$$

Очевидно

$$\iint [\sup\{u_{n'}\} - \inf\{u_1\}]\,dx\,dy < M, \tag{12}$$

где $f_1 < f_{n'}$.

Допустим далее, что существует такое $m > 0$, что при всяком δ_k найдутся $\delta_k' \leqslant \delta_k$ такие, что

$$\sup\{u_k\} - \inf\{u_k\} \geqslant m, \tag{12'}$$

если $f_n^* - f_k < \delta_k'$ по крайней мере в одной точке M_k. Очевидно, что при $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$ последовательность точек M_k не может стремиться к границе области, так как это противоречило бы монотонности последовательности множества функций $u_k(x, y)$. Отсюда на основании равностепенной непрерывности следует, что

$$\iint_D [\sup\{u_k\} - \inf\{u_k\}]\,dx\,dy \geqslant M_1, \tag{13}$$

где $M_1 > 0$ и не зависит от δ_k.

Рассмотрим последовательность $\delta_k \to 0$. Для каждой f_k получим на основании соотношения (13) число M_1. Если бы имело место (12′), то было бы $M_1 . k < M$ при любом k. Но это невозможно. Таким образом, лемма доказана.

Примечание. Доказанная лемма справедлива для функций, определенных в бесконечной области, если для них имеет место следующее условие: для всякого ε найдутся такие L и N, что для всех допустимых $u_k(x, y)$ при $y \geqslant L$ имеет место соотношение $|u_n^*(x, y) - u_{n'}(x, y)| < \varepsilon$, если $n' \geqslant N$ и $f_{n'} \to f_n^*$ при $n' \to \infty$. Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА 5. *Решение уравнения* (6) *пограничного слоя при условиях* (11), (11′) *и* $\theta(x) = 1$ *единственно.*

Доказательство. Пусть существует два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ таких, что

$$|u_1(x_0', y_0') - u_2(x_0', y_0')| \geqslant m > 0,$$

если $(x_0' - x_0)^2 + (y_0' - y_0)^2 \leqslant \rho^2$. Рассмотрим две функции

$$\left.\begin{aligned} v_1(x, y, \alpha) &= \frac{u_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y\right) - \alpha}{1-\alpha}, \\ v_2(x, y, \alpha) &= \frac{u_2\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y\right) - \alpha}{1-\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где α — достаточно малый параметр. Функции v_1 и v_2 удовлетворяют следующим условиям:

1° они удовлетворяют уравнению (6);

2° $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ при $\alpha = 0$;

3° $v_2(0, y, \alpha) = v_1(0, y, \alpha) = \frac{\varphi(y) - \alpha}{1-\alpha} \leqslant \varphi(y)$,

$$v_1(x, 0, \alpha) = v_2(x, 0, \alpha) = 1,$$

$$v_1(y, \infty, \alpha) = v_2(x, \infty, \alpha) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}.$$

К функциям v_1 и v_2 применимы рассуждения леммы 4, откуда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое α_0, что

$$|v_1(x, y, \alpha)| - v_2(x, y, \alpha)| \leqslant \varepsilon, \tag{15}$$

если $\alpha \leqslant \alpha_0$ при всех $x \leqslant X$. Но при достаточно малых α будем иметь

$$\left| u_1\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-\alpha}}, y_0\right) - u_2\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-\alpha}}\right)\right| \geqslant m > 0, \tag{16}$$

где $x_0 < X$. Из формул (14) и (16) получаем

$$|v_1(x_0, y_0, \alpha) - v_2(x_0, y_0, \alpha)| =$$
$$= \frac{\left| u_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y_0\right) - u_2\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-\alpha}}, y_0\right)\right|}{1-\alpha} \geqslant \frac{m}{2},$$

что противоречит неравенству (15). Теорема единственности доказана.

Примечание. Хотя это и следует из метода доказательства последних теорем, отметим еще раз, что для случая, когда $\theta(x)$ есть неубывающая функция от x, теорема единственности легко доказывается, если условие (11′) заменить условием

$$u''(0, y) = \varphi''(y) \geqslant 0 \text{ при } y > 0.$$

Действительно, в этом случае, если существует не одно решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (11), то среди них имеется такое u_1, которое во всей области удовлетворяет условию $\frac{\partial u_1}{\partial x} \geqslant 0$. Но тогда, составляя уравнение для разности $u_2 - u_1$, где u_2 — какое-либо другое решение, удовлетворяющее тем же граничным условиям, получим

$$\frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u_2}} \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial x} + \left(\frac{1}{\sqrt{\theta - u_2}} - \frac{1}{\sqrt{\theta - u_1}}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Пусть $u_2 - u_1 = 0$ на границе некоторой области, а внутри сохраняет знак. Тогда из последнего уравнения следует, что $u_2 - u_1 = 0$ всюду в указанной области.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило 30 I 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Розе Н. В., Кибель И. А. и Кочин Н. Е., Теоретическая гидродинамика ч. II, М.-Л. 1937, стр. 395.

[2] Бернштейн С. Н. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, Доклады Акад. Наук СССР, XVIII (1938), 385—388.

[3] Rothe R. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionalen Randwertaufgaben, Mathem. Ann., 102 (1930), 650—670.

[4] Пискунов Н. С., Краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа, Матем. сборн., 7 (1940), 382—424.

N. PISCOUNOV. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA THÉORIE DES COUCHES FRONTIÈRES

RÉSUMÉ

L'étude du mouvement d'un liquide dans une couche frontiere a été réduite par Prandtl à la solution du système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où v_x et v_y sont les fonctions cherchées vérifiant les conditions:

$$\left.\begin{aligned} &v_x = v_y = 0 &&\text{pour } y = 0, \\ &v_x = U &&\text{pour } y = \infty, \\ &v_x = v_0(x, y) &&\text{pour } t = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

p et U étant des fonctions données.

Pour les cas d'un mouvement stabilisé, Mieses a réduit le problème posé d'une manière suivante: trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta(x) - u}} \frac{\partial u}{\partial x}$$

vérifiant les conditions

$$u(0, y) = \varphi(y); \ u(x, 0) = \theta(x); \ \lim_{y \to \infty} u(x, y) = 0,$$

où la fonction $\theta(x)$ est continue et non-décroissante.

Nous démontrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Considérons l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\theta - u}} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3}$$

qui possède une solution dans un domaine $A\{x \leqslant X, -R \leqslant y \leqslant R\}$. Alors les modules des dérivées successives de la solution peuvent être évalués dans le domaine considéré au moyen du maximum de la solution indépendamment du caractère des données initiales.

La démonstration du théorème peut être effectuée par une méthode analogue à celle de S. Bernstein (²).

THÉORÈME 3. *Il existe une solution de l'équation* (3) *vérifiant les conditions*

$$u(0, y) = \varphi(y); \; u(x, 0) = \theta(x), \; \lim_{y \to \infty} u(x, y) = 0, \tag{4}$$

où $\varphi(y)$ est une fonction continue vérifiant les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \; \varphi(0) = \theta(0); \; \lim_{y\to\infty} \varphi(y) = 0; \; \theta(0) > \varphi(y) \text{ pour } y > 0, \\ &2^\circ \; \varphi(y) \leqslant \theta(0) - ky \text{ pour } y < k_1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où k et k_1 sont des nombres aussi petits que l'on voudra.

Pour établir l'unicité on démontre les propositions auxiliaires suivantes.

LEMME 3. *La suite des solutions de l'équation* (3)' *est non-décroissante, si la suite des fonctions initiales $\varphi_n(y)$ est croissante* ($\varphi_n(0) \leqslant \theta(0)$, $\varphi_n(\infty) \leqslant 0$).

Considérons le domaine $D\{x \leqslant X, \; y \leqslant M\}$. Supposons que sur la frontière du domaine (sur les droites $y = 0$, $x = 0$, $y = M$) on a donné des fonctions $\{f_n(s)\}$. À chaque $[f_n(s)]$ on fait correspondre une famille de fonctions $\{u_n(x,y)\}$ vérifiant les conditions suivantes:

1) sur la frontière elles coïncident avec les $f_n(s)$;

2) elles sont également continues pour toutes les $f_n(s)$;

3) $\inf\{u_n(x, y)\} \geqslant \sup\{u_{n'}(x, y)\}$, *si* $f_n(s) > f_{n'}(s)$.

On a alors le

LEMME 4. *Pour chaque* ε *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $\sup\{u_{n'}(x, y)\} - \inf\{u_{n'}(x, y)\} \leqslant \varepsilon$, *si* $|f_n(s) - f_{n'}(s)| < \delta$.

Le lemme énoncé est vrai pour le cas $M = \infty$, si l'on a:

Quel que soit ε, *il existe des nombres L et N tels que pour toutes les $u_k(x, y)$ admissibles on a la relation* $|u_n(x, y) - u_{n'}(x, y)| < \varepsilon$, *si* $n' \geqslant N$, $y \geqslant L$.

Cela étant, on peut démontrer le

THÉORÈME 5. *La solution de l'équation* (3) *est unique quand les conditions* (4) *et* (5) *sont vérifiées et quand $\varphi(y)$ vérifie la condition supplémentaire $\varphi''(y) \geqslant 0$ pour $y \leqslant \varepsilon$, ε étant arbitraire* et $\theta(x) = 1$.

La démonstration est basée sur le fait suivant. Supposons que dans certaines conditions limites il existe deux solutions différentes $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$. Considérons deux autres solutions:

$$v_1(x, y, \alpha) = \frac{u_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y\right) - \alpha}{1-\alpha}, \quad v_2(x, y, \alpha) = \frac{u_2\left(\frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}, y\right) - \alpha}{1-\alpha}.$$

En vertu du lemme 4 on trouve $\lim\limits_{\alpha \to 0} [v_1(x, y, \alpha) - v_2(x, y, \alpha)] = 0$ ce qui contredit à l'hypothèse que l'unicité n'a pas lieu.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 3—16 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О СХОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ $\sum_0^n C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m}$ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Предлагаемая работа содержит систематическое исследование областей сходимости многочленов $B_n(f(x))$ для аналитических функций $f(x)$, регулярных в данной области комплексной плоскости.

§ 1. Основное преобразование многочленов $B_n(f(x))$ в комплексной области

Вопрос о сходимости в комплексной области многочленов

$$B_n(f(x)) = B_n(f(z);\ x,\ 1) = \sum_0^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \qquad (1)$$

впервые был рассмотрен Л. В. Канторовичем в прекрасной работе «О сходимости последовательности полиномов С. Бернштейна вне основного промежутка» (Известия Акад. Наук СССР (1931), 1103—1115). После этого я посвятил тому же вопросу две статьи*. Настоящая статья имеет целью развить идею, лежащую в основе статьи из Comptes Rendus, и дать полное доказательство теорем, указанных в ней.

---

* Sur la convergence de certaines suites de polynomes. Journal de Mathématiques, XV (1936), 345—358. Sur le domaine de convergence des polynomes $B_n(f(x)) = \sum_0^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$. Comptes Rendus, 202 (1936), 1356—1358.

Исходной формулой является преобразование (1) к виду

$$B_n(f(x)) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)(x-1)^{n(1-z)} x^{nz} dz}{z(nz-1)\ldots(nz-n)}, \tag{2}$$

в которой C — любой контур, ограничивающий область, где $f(z)$ по предположению регулярна, включающую отрезок 01. При этом x предполагается отличным от 0 и 1.

Действительно, подинтегральная функция имеет полюсами точки $z = \frac{m}{n}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ с вычетами

$$\frac{f\left(\frac{m}{n}\right)(x-1)^{n-m}x^m}{m(m-1)\ldots(-1)(-2)\ldots(m-n)} = \frac{f\left(\frac{m}{n}\right)x^m(1-x)^{n-m}}{m!(n-m)!}.$$

Покажем, что

$$\lim_{n=\infty}\left\{B_n(f(x)) - \frac{1}{i}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_C f(z)\left[\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z}\left(\frac{x}{z}\right)^z\right]^n \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}}\right\} = 0, \tag{3}$$

если

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_C \left|\frac{f(z)}{\sqrt{z(z-1)}}\left[\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z}\left(\frac{x}{z}\right)^z\right]^n\right| dz \to 0.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{n}\log\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)\sqrt{z(z-1)} =$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\log z + \log\left(z-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \log\left(z-\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2}\log(z-1)\right] =$$
$$= \int_0^1 \log(z-t)\,dt + \varepsilon_n,$$

где $n^2\varepsilon_n$ остается конечным, если z находится вне отрезка 01. Но

$$\int_0^1 \log(z-t)\,dt = \log(z-1) + \int_0^1 \frac{t\,dt}{z-t} = -1 + (1-z)\log(z-1) + z\log z,$$

поэтому

$$\log\left(z-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(z-\frac{n-1}{n}\right)\sqrt{z(z-1)} =$$
$$= n\left[-1 + (1-z)\log(z-1) + z\log z + \varepsilon_n\right],$$

т. е.

$$\frac{z\left(z-\frac{1}{n}\right)\ldots(z-1)\,e^n}{[(z-1)^{1-z}z^z]^n} = (1+\rho_n)\sqrt{z(z-1)},$$

где $n\rho_n$ остается конечным при $n \to \infty$. Следовательно, принимая во внимание формулу Стирлинга, получаем из (2)

$$B_n(f(x)) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_C f(z)(1+\rho_n')\left[\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z}\left(\frac{x}{z}\right)^z\right]^n \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)}}, \tag{3-bis}$$

где $n\rho_n'$ остается конечным, откуда вытекает (3).

§ 2. Узловая линия и петля

Из (3) или (3-bis) видно, что сходимость $B_n(f(x))$ в точке x существенным образом зависит от расположения линии

$$\left|\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z}\left(\frac{x}{z}\right)^{z}\right|=1, \tag{4}$$

которую назовем **узловой линией** точки (узла) x.

Полагая $z=a+ib$, $x=\alpha+i\beta$ и рассматривая функцию

$$F(z, x)=(1-z)\log\frac{x-1}{z-1}+z\log\frac{x}{z}=P_x(a, b)+iQ_x(a, b) \tag{5}$$

в плоскости переменной z *с купюрой по отрезку* 01, где $F(z, x)$ является однозначной функцией, замечаем, что узловая линия определяется уравнением $P_x(a, b)=0$ и имеет одну двойную точку (узел) $a=\alpha$, $b=\beta$. В самом деле,

$$F(z, x)=0, \qquad \frac{\partial F(z, x)}{\partial z}=-\log\frac{x-1}{z-1}+\log\frac{x}{z}=0 \tag{6}$$

только при $z=x$; все же прочие линии уровня $P_x(a, b)=C$ особых точек не имеют (если не считать точек отрезка 01, которые являются точками *излома*). Кроме того,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}, \quad \frac{\partial^{k+1}F}{\partial z^{k+1}}=(-1)\ (k-1)!\left[\frac{1}{z^k}-\frac{1}{(z-1)^k}\right] \quad (k\geqslant 1),$$

поэтому вблизи точки x

$$F(z, x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)(z-x)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{(-1)^k}{k(k+1)}\left[\frac{1}{x^k}-\frac{1}{(x-1)^k}\right](z-x)^{k+1}+\dots, \tag{7}$$

причем радиус сходимости равен наименьшему из чисел x и $|x-1|$ (однако в случае $0<\alpha<1$ равенство (7) неприменимо при $\beta.b<0$). В дальнейшем, не нарушая общности выводов, будем считать $\beta\geqslant 0$.

Из (7) и (5) находим уравнение пучка ортогональных касательных к узловой линии в узле (α, β):

$$(\alpha^2-\alpha-\beta^2)(a-\alpha)^2+2\beta(2\alpha-1)(a-\alpha)(b-\beta)-(\alpha^2-\alpha-\beta^2)(b-\beta)^2=0. \tag{8}$$

ЛЕММА 1. *Узловая линия состоит из петли (замкнутого контура) F_x и ее продолжения в виде двух ветвей, исходящих под прямым углом из узла x и удаляющихся в бесконечность; петля F_x включает в себя весь отрезок* 01, *если* $|x|\geqslant 1$, $|x-1|\geqslant 1$, *или часть отрезка* 01, *если хотя бы одно из этих двух неравенств нарушено (если, при* $0<\alpha<1$, $\beta\to 0$, *то петля F_x превращается в точку x).*

В самом деле, ординаты b точек пересечения узловой линии

$$P_x(a, b)=(1-a)\log\left|\frac{x-1}{z-1}\right|+a\log\left|\frac{x}{z}\right|+b\left[\arg\frac{z}{z-1}-\arg\frac{x}{x-1}\right]=0 \tag{9}$$

с прямой $a=h$, параллельной оси ординат, удовлетворяют уравнению $P_x(h, b)=0$. Но уравнение

$$\frac{\partial P_x}{\partial b}=\arg\frac{z}{z-1}-\arg\frac{x}{x-1}=0, \tag{10}$$

левая часть которого непрерывна в случае $\left|h-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$, а в случае $\left|h-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ имеет разрыв, равный -2π при $b=0$, имеет не более двух корней в первом случае и не более одного корня во втором случае, так как ему удовлетворяют только точки верхней части окружности, проходящей через точки $0, 1, x$. Поэтому уравнение $P_x(h, b)=0$ не может иметь более трех корней; в частности, если узловая линия содержит замкнутый контур (петлю) F_x, то число точек пересечения F_x с прямой, параллельной оси ординат, должно быть не более двух. С другой стороны, функция

$$P_x(a, 0)=(1-a)\log\left|\frac{x-1}{a-1}\right|+a\log\left|\frac{x}{a}\right| \tag{11}$$

достигает максимума при

$$\left|\frac{a-1}{a}\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right| \tag{12}$$

в той из двух гармонических точек a_1, a_2, определяемых уравнением (12), которая лежит внутри отрезка 01, так как

$$\frac{\partial P_x(a, b)}{\partial a}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{(a-1)^2+b^2}{a^2+b^2}-\log\frac{(\alpha-1)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right] \tag{13}$$

и

$$\frac{\partial^2 P_x(a, b)}{\partial a^2}=\frac{a-1}{(a-1)^2+b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{a(a-1)-b^2}{[(a-1)^2+b^2][a^2+b^2]} \tag{14}$$

отрицательна при $0<a<1$. Положим, для определенности, $\left|\frac{x-1}{x}\right|\leqslant 1$, т. е. $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$; тогда максимум $M=P_x(a_1, 0)$ функции $P_x(a, 0)$ достигается в точке $a_1\geqslant\frac{1}{2}$ отрезка 01, и так как $a_1=\frac{|x|}{|x|+|x-1|}$, то

$$M=\frac{|x-1|}{|x|+|x-1|}\log[|x|+|x-1|]+$$
$$+\frac{|x|}{|x|+|x-1|}\log[|x|+|x-1|]=\log[|x|+|x-1|]>0.$$

Кроме того, в точке $(a_1, 0)$ достигается также максимум $P_x(a, b)$, рассматриваемой как функция двух переменных (a, b), так как во всех точках 01

$$\frac{\partial P_x(a, +0)}{\partial b}=-\pi-\arg\frac{x}{x-1}<0,\quad \frac{\partial P_x(a, -0)}{\partial b}=\pi-\arg\frac{x}{x-1}>0.$$

Поэтому линия уровня вблизи $(a_1, 0)$

$$P_x(a, b)=C$$

для $C<M$, достаточно близких к M, представляет замкнутый контур, и вследствие вышесказанного это будет иметь место, когда $C>0$; расщепление линии уровня произойдет лишь при $C=0$, соответствующем узловой линии с узлом в точке x, где $\frac{\partial P_x}{\partial a}=\frac{\partial P_x}{\partial b}=0$. Следовательно, в узле петля F_x замкнется под прямым углом и продолжение ее пойдет по двум ветвям, удаляющимся в бесконечность.

Согласно (13) уравнение $\frac{\partial P_x}{\partial a}=0$ представляет окружность, поэтому

уравнение $P_x(a, b) = 0$ при данном b также имеет не более трех корней, вследствие чего прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает петлю F_x не более, чем в двух точках; в частности, при $b = 0$ уравнение (9) имеет два корня, из которых один меньше a_1, а другой заключен между a_1 и a_2. Для определения положения этих двух корней, являющихся точками пересечения петли F_x с осью абсцисс, рассмотрим три случая:

1) $1 < |x-1| \leqslant |x|$; 2) $|x-1| \leqslant 1 < |x|$; 3) $|x-1| \leqslant x < 1$.

В первом случае

$$P_x(0,0) = \log|x-1| > 0; \quad P_x(1,0) = \log|x| > 0,$$

поэтому петля F_x включает весь отрезок 01. Во втором случае

$$P_x(0,0) = \log|x-1| \leqslant 0; \quad P_x(1,0) = \log|x| > 0,$$

и петля F_x включает часть отрезка 01 с концом 1, но без точки 0. В третьем случае

$$P_x(0,0) = \log|x-1| < 0; \quad P_x(1,0) = \log|x| < 0,$$

и петля F_x включает часть отрезка 01, не содержащую ни одного из его концов*.

Кроме того, за исключением случая $|x| = |x-1|$ $\left(\text{т. е. при } \alpha = \frac{1}{2}\right)$, когда $a_2 = \infty$, узловая линия имеет еще одну точку $\xi > a_2$ на оси абсцисс, так как

$$P_x(a, 0) = a\log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \log|a-1| + a\log\left|1 - \frac{1}{a}\right| + \log|x-1| \quad \text{(11-bis)}$$

становится положительным при $a \to +\infty$.

§ 3. Важнейшие свойства петли F_x

ЛЕММА 2. *Прямые, не пересекающие отрезка 01, а также все прямые, образующие угол не более 45° с осью абсцисс, имеют не более двух точек на петле F_x (при любом узле x).*

Пусть

$$b = m(a - a_0) \tag{15}$$

— уравнение рассматриваемой прямой. Положим сначала, что она не пересекает отрезка 01, т. е. $a_0(a_0 - 1) > 0$. Абсцисса a точки ее пересечения с узловой линией удовлетворяет уравнению

$$P_x(a, m(a - a_0)) = 0. \tag{16}$$

Для исследования числа корней этого уравнения берем первую и вторую производные:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_x}{da} &= \frac{1}{2}\left[\log\frac{(a-1)^2 + m^2(a-a_0)^2}{a^2 + m^2(a-a_0)^2} - \log\frac{(\alpha-1)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right] + \\ &\quad + m\left[\arg\frac{z}{z-1} - \arg\frac{x}{x-1}\right]; \\ \frac{d^2P_x}{da^2} &= \frac{a - 1 + m^2(a + 1 - 2a_0)}{(a-1)^2 + m^2(a-a_0)^2} - \frac{a + m^2(a - 2a_0)}{a^2 + m^2(a-a_0)^2} = \\ &= \frac{(m^2+1)^2a^2 - (m^2+1)[2a_0m^2+1]a + m^2a_0[a_0(m^2-1)+2]}{[(a-1)^2 + m^2(a-a_0)^2][a^2 + m^2(a-a_0)^2]}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

* Если $|x| = 1$, то F_x проходит через точку 1; если $|x-1| = 1$, то F_x проходит через 0.

Замечая, что $\frac{d^2P_x}{da^2}$ имеет не более двух корней, заключаем, что $\frac{dP}{da}$ имеет не более трех корней. Но при $a = \pm\infty$ значения $\frac{dP_x}{da}$ равны между собой, поэтому число корней $\frac{dP_x}{da}$ четное, т. е. не более двух, а, следовательно, число корней уравнения (16) не более трех, и петля F_x имеет не более двух точек пересечения с прямой (15).

В случае $a_0(a_0-1) \leqslant 0$, к которому мы теперь переходим, предыдущее рассуждение неприменимо, так как $\frac{dP_x}{da}$ имеет скачок, равный $-2m\pi$ в точке a_0 отрезка 01. Заметим, что $\frac{dP_x}{db} = \frac{1}{m}\frac{dP_x}{da}$, если вместо переменной a будем рассматривать $b = m(a-a_0)$, так что скачок $\frac{dP_x}{db}$ при переходе в верхнюю полуплоскость отрицателен (равен -2π); поэтому, если P_x достигает при этом экстремума, то это может быть только максимум. Таким образом, обозначая через a', a'' оба корня $\frac{d^2P_x}{da^2}$ и учитывая, что знак $\frac{d^2P_x}{da^2}$ вне промежутка (a', a'') тот же, что при $a = \pm\infty$, т. е. положителен, видим, что P_x не может иметь минимума между a' и a''; следовательно, при $m^2 \leqslant 1$ $(0 < a < 1)$, когда

$$\left(\frac{d^2P_x}{da^2}\right)_{a=a_0} = \frac{1-m^2}{a_0(a_0-1)} \leqslant 0,$$

P_x не может иметь двух максимумов, а поэтому прямая (15) пересекает петлю F_x не более, чем в двух точках.

Следствие 1. *Если петля F_x включает отрезок* 01, т. е. $|x| \geqslant 1$, $|x-1| \geqslant 1$, *то она конвексна.*

В самом деле, если, непрерывно передвигая точку на петле F_x вместе с ее касательной, начиная от точки (a_0, a) на оси абсцисс (вне отрезка 01), мы дошли бы до точки перегиба ранее, чем до узла x, то касательная к F_x в точке перегиба также пересекла бы ось абсцисс вне отрезка 01; но это противоречит лемме 2.

Замечание. Если петля F_x не включает всего отрезка 01, то она может и не быть конвексной. Вообще, угловой коэффициент m касательной к узловой линии определяется равенством

$$m = -\frac{\frac{\partial P_x}{\partial a}}{\frac{\partial P_x}{\partial b}}, \tag{18}$$

и для того, чтобы петля F_x была конвексной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial m}{\partial a} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a^2} + m\frac{\partial^2 P_x}{\partial a \partial b}\right)\frac{\partial P_x}{\partial b} - \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a \partial b} + m\frac{\partial^2 P_x}{\partial b^2}\right)\frac{\partial P_x}{\partial a}}{\left(\frac{\partial P_x}{\partial b}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 P_x}{\partial a^2} + 2m\frac{\partial^2 P_x}{\partial a\,\partial b} + m^2\frac{\partial^2 P_x}{\partial b^2}}{\frac{dP_x}{db}} \tag{19}$$

было отрицательно в верхней части F_x и положительно в нижней ее части. Полагая попрежнему, для определенности, $\beta>0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, заключаем, как и выше, что при $a_0 > 1$ правая часть петли F_x, прилегающая к ее точке пересечения a_0 с осью абсцисс, заключенная между узлом x и нижней точкой петли F_x, во всяком случае конвексна. Я утверждаю, что если петля F_x пересекает отрезок 01 в точке a_0 $(0 < a_0 < 1)$, то для нарушения конвексности необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере в одной из точек пересечения F_x с отрезком 01 угловой коэффициент касательной m_0 к верхней дуге F_x удовлетворял неравенству

$$m_0^2 > 1. \tag{20}$$

Действительно, по формуле (19) в точке $(a_0, 0)$

$$\left(\frac{dm}{da}\right)_{\substack{a=a_0\\ m=m_0}} = \frac{1-m_0^2}{\frac{\partial P_x}{\partial b}(1-a_0)\,a_0} = \frac{m_0^2-1}{\left(\pi + \arg\frac{x}{x-1}\right)(1-a_0)\,a_0}. \tag{21}$$

Поэтому при условии (20) $\left(\frac{dm}{da}\right)_{\substack{a=a_0\\ m=m_0}} > 0$, и конвексность в верхней полуплоскости (или в точке x_0) нарушается. Напротив, в случае $m_0^2 < 1$ угловой коэффициент m_1 касательной в точке a_0 к F_x в нижней полуплоскости a fortiori* удовлетворяет неравенству $m_1^2 < 1$, поэтому как верхняя, так и нижняя дуга F_x конвексна вблизи a_0, и так как касательная к F_x при следовании по этим дугам до узла x или до нижней точки F_x все время образует с осью абсцисс угол меньше 45°, то конвексность, согласно лемме 2, не может нарушиться.

Отсюда следует, в частности, что *в случае* $|x| < 1$, $|x-1| < 1$ (когда F_x должна пересекать отрезок 01 в двух точках) *петля* F_x *не может быть конвексной*. Действительно, по крайней мере одна из касательных в узле x имеет угловой коэффициент не меньше 1 по абсолютному значению; поэтому, если бы соответствующая ей дуга была конвексна, то при пересечении с отрезком 01 она образовывала бы угол больше 45°, т. е. неравенство (20) было бы соблюдено.

В случае $|x-1| < 1$, $|x| > 1$ петли F_x (имея только одну точку на 01) могут быть конвексными или неконвексными в зависимости от нарушения или соблюдения неравенства (20) в единственной точке a_0 пересечения F_x с отрезком 01. Рассмотрим, например, петлю F_x, соответствующую узлу $(\alpha, 0)$, где $1 < \alpha < 2$ $(x-1 < 1,\ |x| > 1)$. Для определения a_0 имеем уравнение

$$(1-a_0)\log\frac{\alpha-1}{1-a_0} + a_0\log\frac{\alpha}{a_0} = 0. \tag{22}$$

---

* Значения m_0 и m_1 из (18) отличаются лишь знаменателем, который в нижней полуплоскости по абсолютному значению $\left(\pi - \arg\frac{x}{x-1}\right)$ больше, чем в верхней $\left(\pi + \arg\frac{x}{x-1}\right)$.

Угловой коэффициент m_0 в точке a_0 определяется равенством

$$m_0 = \frac{1}{\pi}\left[\log\frac{1-a_0}{a_0} - \log\frac{\alpha-1}{\alpha}\right] = \frac{1}{a_0\pi}\log\frac{1-a_0}{\alpha-1}. \qquad (15\text{-bis})$$

Таким образом, петля F_x будет конвексной при α, близком к 1, и будет оставаться конвексной пока

$$\frac{1-a_0}{\alpha-1} \leqslant e^{a_0\pi},$$

где a_0 удовлетворяет (22), т. е. пока

$$-a_0\pi(1-a_0) + a_0\log\frac{1+(1-a_0)e^{-a_0\pi}}{a_0} \leqslant 0.$$

Иначе говоря, F_x остается конвексной, если точка a_0 пересечения петли F_x с отрезком 01 (где a_0 растет от 0 до 1, когда α убывает от 2 до 1) удовлетворяет неравенству

$$\frac{e^{a_0\pi}+1}{a_0} \leqslant e^{\pi}+1,$$

т. е. при $A \leqslant a_0 \leqslant 1$, где $A < 1$ — корень уравнения $\dfrac{e^{A\pi}+1}{A} = e^{\pi}+1$

§ 4. Автономные области

ЛЕММА 3. *Если точка x_1 есть некоторая точка выпуклости на петле F_x (т. е. касательная в точке x_1 не пересекает F_x), то петля F_{x_1} с узлом x_1 находится целиком внутри F_x.*

В самом деле, если $P_x(a, b) = 0$, $P_{x_1}(a, b) = 0$ уравнения двух узловых линий соответственно с узлами x и x_1, то

$$P_{x_1}(a, b) = P_x(a, b) + Aa + Bb + C,$$

где

$$A = \log\left|\frac{x_1}{x}\right| - \log\left|\frac{x_1-1}{x-1}\right|, \quad B = \arg\frac{x}{x_1} - \arg\frac{x-1}{x_1-1}, \quad C = \log\left|\frac{x_1-1}{x-1}\right|.$$

Поэтому все точки пересечения данных узловых линий лежат на одной и той же прямой

$$Aa + Bb + C = 0. \qquad (23)$$

В частности, если узел x_1 петли F_{x_1} находится на петле F_x, то касательная к F_x в точке x_1 имеет в x_1 двойную точку пересечения как с F_x, так и с F_{x_1}; поэтому (23) есть уравнение рассматриваемой касательной; следовательно, в случае выпуклости F_x в точке x_1, т. е. при отсутствии других точек пересечения F_x с прямой (23), F_x также не имеет других общих точек с F_{x_1}.

Определение. Будем называть область S, включающую отрезок 01, автономной, если петля любой точки контура C, ограничивающего эту область, находится целиком внутри C*. (Напомним, что петля точки x на отрезке 01 приводится к единственной точке x.)

* Из дальнейшего (§ 6—7) будет следовать, что петли точек, лежащих внутри S, также находятся целиком внутри автономной области S.

Из определения непосредственно следует, что две автономные области S и S_1 всегда имеют общую часть, и *сумма двух автономных областей S и S_1 также представляет автономную область.*

В дальнейшем (следствие 10) будет показано фундаментальное значение автономных областей в теории сходимости многочленов $B_n(f(x))$. Поэтому мы укажем здесь важнейшие примеры автономных областей.

Следствие 2. *Область S, ограниченная конвексной петлей F_x* (дополненная в случае надобности частью отрезка 01, не попавшего внутрь F_x), *автономна.*

Следствие 3. *Если дано множество E точек x, для которых* $|x| \geqslant 1$, $|x-1| \geqslant 1$, *то наименьшей автономной областью S, включающей все точки множества E, является сумма областей, ограниченных петлями F_x всех точек x множества E.*

Для выявления некоторых других полезных примеров автономных областей необходимо обратить внимание еще на несколько простых свойств петель F_x.

§ 5. Узловые окружности

Определение. Назовем **первой узловой окружностью петли** F_x (или **узла** x) окружность C'_x с центром на оси абсцисс, имеющую уравнение

$$\left|\frac{z-1}{z}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|, \tag{24}$$

на которой находятся точки F_x с горизонтальной касательной; назовем **второй узловой окружностью** C''_x **петли** F_x (или **узла** x) дугу ортогональной к C'_x окружности, заданную уравнением

$$\arg\frac{z-1}{z} = \arg\frac{x-1}{x}, \tag{25}$$

где находятся точки F_x с вертикальной касательной.

Легко проверить, что радиус R и абсцисса a центра окружности C'_x при любом x связаны соотношением $R^2 = a(a-1)$; поэтому геометрическим местом концов A и A_1 вертикальных диаметров окружностей C'_x является равнобочная гипербола Γ, имеющая уравнение

$$b^2 - a^2 + a = 0. \tag{26}$$

Вследствие (8) Γ является также геометрическим местом узлов x, обладающих свойством, что пара касательных в них к петле F_x параллельна осям координат. В силу ортогональности семейств окружностей C'_x и C''_x гипербола Γ является также геометрическим местом концов B и B_1 горизонтальных диаметров окружностей C''_x.

В общем случае, когда точка x не совпадает с A $\left(\text{мы считаем попрежнему } \alpha \geqslant \frac{1}{2},\ \beta \geqslant 0\right)$, для построения касательных к петле F_x в узле x можно предложить следующее построение: *Обе касательные в точке x совпадают с прямыми xA и xA_1, соединяющими x с концами вертикаль-*

ного диаметра C'_x; при этом правая дуга петли F_x направлена по хорде xA_1 первой узловой окружности C'_x, а левая дуга, касаясь хорды xA, направляется вдоль нее, т. е. вверх, когда x находится правее диаметра AA_1, и направляется по продолжению хорды x, т. е. вниз, когда x находится на левой половине окружности C'_x. В виду ортогональности обеих узловых окружностей эти касательные могут быть также получены соединением точки x с концами B и B_1 горизонтального диаметра второй узловой окружности C''_x. В самом деле, если

$$f(a, b) = (b - ma)(a + mb) = mb^2 + (1 - m^2)ab - ma^2 = 0$$

есть уравнение пары ортогональных прямых, то

$$f'_a = (1 - m^2)b - 2ma = 0, \quad f'_b = 2mb + (1 - m^2)a = 0$$

представляют пару ортогональных прямых, образующих соответственно вдвое большие углы с осями координат. Поэтому из уравнения пары касательных в узле x

$$\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a^2}\right)_{z=x}(a-\alpha)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a\,\partial b}\right)_{z=x}(a-\alpha)(b-\beta) + \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial b^2}\right)_{z=x}(b-\beta)^2 = 0$$

следует, что эти прямые образуют с осями координат вдвое меньшие углы, чем прямые

$$\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a^2}\right)_{z=x}(a-\alpha) + \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a\,\partial b}\right)_{z=x}(b-\beta) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial a\,\partial b}\right)_{z=x}(a-\alpha) - \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial b^2}\right)_{z=x}(b-\beta) = 0,$$

являющиеся касательной и нормалью к окружности $\frac{\partial P_x}{\partial a} = 0$, т. е. (24).

Кроме того для нахождения автономных областей с двумя осями симметрии, полезна следующая

ЛЕММА 4. *Если произвести зеркальное отображение правой верхней четверти петли* F_x $\left(\beta \geqslant 0,\ \alpha \geqslant \frac{1}{2},\ b \geqslant 0,\ a \geqslant \frac{1}{2}\right)$ *относительно оси абсцисс и прямой* $a = \frac{1}{2}$, *то* F_x *находится внутри полученного таким образом симметричного контура.*

В самом деле,

$$P_x(a, -b) = P_x(a, b) + 2b \arg\frac{x}{x-1} < P_x(a, b) \tag{27}$$

при $b > 0$, $\beta > 0$. С другой стороны,

$$P_x(1-a, b) = P_x(a, b) + (2a-1)\log\left|\frac{x-1}{x}\right| < P_x(a, b). \tag{27-bis}$$

Следствие 4. 1) *Если узел* x $\left(\beta \geqslant 0,\ \alpha \geqslant \frac{1}{2}\right)$ *находится внутри ветви гиперболы* Γ $(\alpha^2 - \alpha - \beta^2 > 0)$, *то петля* F_x *находится внутри шестиугольника, симметричного относительно прямой* $a = \frac{1}{2}$ *с горизонтальными сторонами, проходящими через* A *и* A_1, *и боковыми сторонами* xA *и* xA_1 $\Big($*координаты точек* A *и* A_1 *равны* $\frac{1}{1-k^2}$ *и* $\pm\frac{k}{1-k^2}$;

где $k = \left|\frac{x-1}{x}\right|$) ; 2) *если узел x находится между ветвями гиперболы Γ* ($\alpha^2 - \alpha - \beta^2 \leqslant 0$), *но вне окружности $\alpha^2 - \alpha + \beta^2 = 0$, имеющей диаметром отрезок 01, то петля F_x находится внутри симметричного относительно оси абсцисс шестиугольника, образованного хордами второй узловой окружности, соединяющими x с концами ее горизонтального диаметра, и вертикальными касательными к ней*; 3) *если же узел находится внутри окружности $\alpha^2 - \alpha + \beta^2 = 0$, то петля F_x находится внутри симметричного относительно оси абсцисс четыреугольника, имеющего сторонами $0x$ и $x1$.*

В самом деле, в случае 1), т. е. при $\alpha^2 - \alpha - \beta^2 \geqslant 0$, замечаем, что петля F_x находится внутри прямого угла AxA_1 и между горизонтальными прямыми, проходящими через A и A_1, так как нижняя и верхняя точки петли F_x лежат на первой узловой окружности C'_x, и внутри нее петля F_x конвексна. В случае 2), т. е. при $\alpha^2 - \alpha - \beta^2 \leqslant 0$, $\alpha^2 - \alpha + \beta^2 \geqslant 0$, замечаем, что крайние правые и левые точки петли F_x находятся на второй узловой окружности или внутри отрезка 01. В случае 3), т. е. при $\alpha^2 - \alpha + \beta^2 < 0$, крайние правые и левые точки петли F_x находятся на отрезке 01, а прямые, выходящие из узла x и пересекающие ось абсцисс вне отрезка 01, не могут иметь других точек на петле F_x (лемма 2).

ЛЕММА 5. *Пусть $A_1A_2A_3A_4$ будет прямоугольник с вершинами на гиперболе Γ; пусть $C'_{A_1} = C'_{A_2}$ будет первой узловой окружностью точек A_1 и A_2 (A_1A_2 есть вертикальный диаметр C'_{A_1}), и пусть $C'_{A_3} = C'_{A_4}$ будет первой узловой окружностью точек A_3 и A_4; пусть $C''_{A_1} = C''_{A_4}$ будет второй узловой окружностью точек A_1 и A_4, и $C''_{A_2} = C''_{A_3}$ — симметричная ей вторая узловая окружность точек A_2 и A_3. Если область S ограничена четырьмя выпуклыми дугами $A_1H_{12}A_2$, $A_2H_{23}A_3$, $A_3H_{34}A_4$, $A_4H_{41}A_1$, находящимися соответственно внутри внешних полукругов C'_{A_1}, C''_{A_2}, C'_{A_3}, C''_{A_4}, причем дуга $A_3H_{34}A_4$ симметрична дуге $A_1H_{12}A_2$ относительно прямой $a = \frac{1}{2}$, а дуга $A_4H_{41}A_1$ симметрична $A_2H_{23}A_3$ относительно оси абсцисс, то область S автономна.*

В самом деле, если точка x находится на дуге $A_1H_{12}A_2$, т. е. внутри внешнего полукруга C'_{A_1} с диаметром A_1A_2, то радиус ее первой узловой окружности C'_x меньше, чем $\frac{1}{2}A_1A_2$, поэтому прямой угол между обеими касательными к петле F_x в узле x находится внутри угла A_1xA_2, и, следовательно, петля F_x проходит левее дуги $A_1H_{12}A_2$ и правее симметричной ей дуги $A_3H_{34}A_4$, оставаясь в то же время между горизонталями A_2A_3 и A_1A_4. Если же x находится на верхней дуге $A_4H_{41}A_1$, т. е. между ветвями гиперболы Γ, то прямой угол между касательными к петле F_x в узле x, опирающийся на концы горизонтального диаметра второй узловой окружности C''_x, находящейся внутри C''_{A_1}, лежит внутри угла A_4xA_1, а потому и петля F_x проходит внутри угла A_4xA_1 и между вертикалями A_1A_2 и A_3A_4.

Рассмотрим некоторые примеры автономных областей S, получаемых посредством применения леммы 5.

Следствие 5. *Область S, ограниченная эллипсом*

$$\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}=1, \tag{28}$$

автономна, если $p \geqslant \frac{1}{2}$, $p \geqslant q \geqslant p\sqrt{\frac{4p^2-1}{12p^2+1}}$, *а также, если* $p \geqslant \frac{1}{2}$, $q \geqslant p \geqslant q\sqrt{\frac{4q^2+1}{12q^2-1}}$. *В частности, первый случай имеет место для эллипсов Чебышева с фокусами* $0,1$ $\left(q^2=p^2-\frac{1}{4}\right)$.

В самом деле, в первом случае, когда $p \geqslant q$ — большая полуось эллипса (28), дуга, лежащая выше стороны A_1A_4 прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$, образованного точками пересечения эллипса (28) с гиперболой (26), всегда удовлетворяет условию леммы 5. Для того чтобы боковые дуги эллипса (28) также находились внутри боковых полуокружностей с вертикальными диаметрами A_1A_2 и A_3A_4, необходимо и достаточно, чтобы координаты x_1, y_1 точки A_1 удовлетворяли неравенству

$$y_1+\left(x_1-\frac{1}{2}\right) \geqslant p, \tag{29}$$

которое после определения $y_1=\frac{q\sqrt{p^2-\frac{1}{4}}}{\sqrt{q^2+p^2}}$, $x_1-\frac{1}{2}=\frac{p\sqrt{q^2+\frac{1}{4}}}{\sqrt{q^2+p^2}}$ из уравнений (28) и (26) принимает вид

$$\frac{q\sqrt{p^2-\frac{1}{4}}+p\sqrt{q^2+\frac{1}{4}}}{\sqrt{q^2+p^2}} \geqslant p. \tag{29-bis}$$

Возведя (29-bis) в квадрат, находим эквивалентное неравенство

$$2pq\sqrt{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(q^2+\frac{1}{4}\right)} \geqslant \left(p^2-\frac{1}{4}\right)(p^2-q^2).$$

После сокращения на $\sqrt{p^2-\frac{1}{4}}$ и вторичного возведения в квадрат, получаем неравенство

$$\frac{1}{4}(p^2+q^2)^2 \geqslant p^2[(p^2-q^2)^2- \text{[illegible]} p^2+q^2)(p^2-3q^2),$$

которое равноценно

$$q \geqslant p\sqrt{\frac{4p^2-1}{12p^2+1}}.$$

Аналогичным образом в случае $q \geqslant p$ замечаем, что для применимости леммы 5 необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось неравенство

$$y_1+\left(x_1-\frac{1}{2}\right) \geqslant q,$$

которое, подобно предыдущему, приводимо сначала к неравенству

$$2pq\sqrt{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(q^2+\frac{1}{4}\right)} \geqslant \left(q^2+\frac{1}{4}\right)(q^2-p^2),$$

а затем к неравенству

$$p \geqslant q \sqrt{\frac{4q^2+1}{12q^2-1}}$$

Любопытно отметить, что в обоих случаях неравенства связывающие большую и малую полуоси эллипса *асимптотически* (при бесконечном возрастании эллипса) равноценны и сводятся к тому, что отношение между ними не должно превышать $\sqrt{3}$.

Следствие 6. *Всякая симметричная относительно оси абсцисс область S, ограниченная конвексным контуром, лежащим внутри круга с диаметром 01, автономна.*

Практически интересным примером такой области S может служить область, ограниченная двумя дугами окружности с центром в некоторой точке a отрезка 01 радиуса ρ ($\rho \leqslant a$, $\rho \leqslant 1-a$) и касательными к ней, проведенными из точек 0 и 1.

Укажем еще один пример области S, не симметричной относительно оси $a=\frac{1}{2}$. Это — конвексные области Γ_{R0}, играющие большую роль в теории нормальных рядов, которые *ограничены внешней частью окружности C радиуса $R<1$ с центром в точке 1 и касательными к этой окружности, проведенными из точки 0.*

Следствие 7. *Область Γ_{R0} автономна.*

В самом деле, если x лежит на касательной к окружности C, то петля F_x находится внутри Γ_{R0} в силу следствия 6. Если же x находится на окружности C, то слева от x петля F_x проходит ниже прямой $0x$, а с правой стороны от x петля F_x вовсе не проходит, если $\alpha^2-\alpha-\beta^2 \geqslant 0$; в случае же $\alpha^2-\alpha-\beta^2<0$, справа от x петля F_x не достигает (следствие 4) ни вертикальной касательной ко второй узловой окружности C''_x, ни верхней полуокружности C''_x, т. е. остается внутри C. Таким образом лежащая в верхней полуплоскости часть петли F_x всегда находится внутри Γ_{R0}, а потому (лемма 4) нижняя часть F_x также находится внутри Γ_{R0}.

Аналогично можно проверить, что если имеем две окружности радиусов R и R_1 соответственно с центрами в точках 0 и 1 ($R+R_1 \leqslant 1$), то конвексная область, образованная ими и их общими касательными, автономна *.

§ 6. Общие свойства точек сходимости многочленов $B_n f(x)$

Перейдем теперь к исследованию связи между областями сходимости многочленов $B_n(f(x))$ и расположением особенностей функции $f(x)$.

ТЕОРЕМА А. *Если функция $f(z)$ регулярна внутри некоторой области, включающей петлю F_x и отрезок 01, то точка x находится внутри области сходимости многочленов $B_n(f(z);\ x, 1)=B_n(f(x))$. Напротив.*

* Отметим также, что всякий круг с центром на отрезке 01, включающий этот отрезок, является автономной областью. Доказательство этого дано в моей вышеупомянутой статье из Journal de Mathématiques.

если $f(z)$ имеет один или несколько полюсов внутри или на петле F_x (будучи регулярной в остальных точках), то точка x не может быть точкой сходимости.

В самом деле, положим, что функция $f(z)$ регулярна внутри круга радиуса ρ с центром x. Возьмем в качестве контура интегрирования в формуле (2) петлю F_x, дополненную в случае надобности бесконечно узкими контурами, замыкающими выходящие из нее части отрезка 01; в таком случае, вследствие (4) на петле F_x условие применимости предельной формулы (3) соблюдено. Петлю F_x можем затем заменить малым отрезком D с серединой в точке x, целиком лежащим в области, где $P_x(a, b) \leqslant 0$, который дополним контуром C_1, окружающим петлю F_x, где $P_x(a, b) = \lambda < 0$, причем постоянную $|\lambda|$ возьмем настолько малой, чтобы контур C_1 не выходил из области регулярности функции $f(z)$. Для этого положим $z = x + t\sqrt{x(1-x)}$; тогда, по формуле (7)

$$F(z, x) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1-2x}{6\sqrt{x(1-x)}}t^3 + \ldots;$$

а потому при $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$, где ε достаточно мало, $P_x(a, b) \leqslant 0$, и интеграл (3) примет вид

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_C \frac{f(z)\,e^{nF(z,x)}}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z)\sqrt{\frac{x(1-x)}{z(1-z)}}\,e^{-\frac{n}{2}(t^2+At^3)}\,dt + \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_{C_1}\frac{f(z)\,e^{nF(z,x)}}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz, \quad (30)$$

где A ограничено, а $|e^{nF(z,x)}| = e^{n\lambda}$ на контуре C_1 убывает в геометрической прогрессии с возрастанием n. Таким образом, второй из интегралов в правой части (30) стремится к нулю с возрастанием n, между тем как первый интеграл после замены $t\sqrt{n} = u$ преобразуется в

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}} f\left(x + u\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\sqrt{\frac{x(1-x)}{z(1-z)}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+\frac{Au^3}{\sqrt{n}}\right)}\,du =$$

$$= \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{Au}{n}\right)}\,du +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}}\left[f\left(x + u\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\sqrt{\frac{x(1-x)}{z(1-z)}} - f(x)\right]e^{-\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{Au}{\sqrt{n}}\right)}\,du.$$

Поэтому, фиксировав ε достаточно малым для того, чтобы $|A\varepsilon| < \frac{1}{4}$ и чтобы на отрезке D иметь $\left|f(z)\sqrt{\frac{x(1-x)}{z(1-z)}} - f(x)\right| < \alpha$, где $\alpha > 0$ — заданная произвольно малая величина, можем после этого взять n_0 достаточно большим, чтобы при всех $n \geqslant n_0$ осуществлялось неравенство

$$\left|\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_C \frac{f(z)\,e^{nF(z,x)}\,dz}{\sqrt{z(1-z)}} - \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{Au}{\sqrt{n}}\right)}\,du\right| < 2\alpha.$$

Но, так как при $|A\varepsilon| < \frac{1}{4}$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{Au}{\sqrt{n}}\right)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1,$$

то

$$\lim_{n=\infty} B_n\big(f(x)\big) = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_C \frac{f(z)\, e^{nF(x,\, z)}}{\sqrt{z(1-z)}}\, dz = f(x).$$

Для доказательства второй части высказанной теоремы предположим сначала, что функция $f(z)$ имеет один простой полюс c внутри петли F_x или на петле F_x (c отлично от x), и пусть $R \geqslant 0$ будет его вычет. В таком случае формула (2) заменится формулой

$$B_n\big(f(x)\big) + R\, \frac{n!\,(x-1)^{n(1-c)}\, x^{nc}}{c\,(nc-1)\dots(nc-n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,(x-1)^{n(1-z)}\, x^{nz}\, dz}{z\,(nz-1)\dots(nz-n)}. \qquad (31)$$

Принимая во внимание, что правая часть равенства (31), согласно предыдущему, имеет пределом $f(x)$, видим, что

$$\lim_{n=\infty} \left[B_n\big(f(x)\big) + R\, \frac{n!\,(x-1)^{n(1-c)}\, x^{nc}}{c\,(nc-1)\dots(nc-n)} \right] = f(x), \qquad (32)$$

и так как точка c находится внутри петли F_x или на ней, вследствие чего

$$|e^{F(c,\,x)}| = \left| \left(\frac{x-1}{c-1}\right)^{1-c} \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^{c} \right| \geqslant 1,$$

заключаем, что

$$\frac{n!\,(x-1)^{n(1-x)}\, x^{nc}}{n^n c\left(c-\frac{1}{n}\right)\dots(c-1)} \backsim \sqrt{\frac{2\pi n}{c\,(c-1)}}\, e^{nF(c,\,x)}$$

бесконечно растет вместе с n, а потому бесконечно растет и $B_n\big(f(x)\big)$, а именно:

$$\lim_{n=\infty} \left[\left(\frac{c-1}{x-1}\right)^{1-c} \left(\frac{c}{x}\right)^{c} \right]^n \cdot \frac{B_n\big(f(x)\big)}{\sqrt{2\pi n}} = -\frac{R}{\sqrt{c\,(c-1)}}. \qquad (33)$$

Аналогичный результат получим, если полюс c любой кратности l, причем R_i — коэффициент при $\frac{1}{(z-c)^{i+1}}$ в разложении Лорана функции $f(z)$ $(i = 0, 1, \dots, l-1)$. Тогда формула (32) заменится формулой

$$\lim_{n=\infty} \left\{ B_n\big(f(x)\big) + n! \sum_{i=0}^{l-1} \frac{R_i}{i!} \cdot \frac{\partial^i}{\partial z^i} \left[\frac{(x-1)^{n(1-z)} \cdot x^{nz}}{z\,(nz-1)\dots(nz-n)} \right]_{z=c} \right\} = f(x). \qquad (32\text{-bis})$$

Но учитывая, что порядок возрастания последовательных членов суммы увеличивается с увеличением i, заключаем, что $B_n\big(f(x)\big)$ асимптотически равен и противоположен по знаку главному члену суммы, соответствующему $i = l-1$, т. е.

$$B_n\big(f(x)\big) \backsim -\frac{n!\,R_{l-1}}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left[\frac{(x-1)^{n(1-z)}\, x^{nz}}{z\,(nz-1)\dots(nz-n)} \right]_{z=c};$$

иначе говоря, принимая во внимание асимптотическое значение производных, находим

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{c-1}{x-1}\right)^{1-c}\left(\frac{c}{x}\right)^{c}\right]^{n}\frac{B_n(f(x))}{\sqrt{2\pi n^{2l-1}}}=$$

$$=-\frac{R_{l-1}}{(l-1)!\sqrt{c(c-1)}}\left[\log\frac{(c-1)x}{c(x-1)}\right]^{l-1}. \qquad \text{(33-bis)}$$

Отсюда видим, что $|B_n(f(x))|$ бесконечно растет при $n\to\infty$.

В случае нескольких полюсов в предельном равенстве, соответствующем (33-bis), будет только один член, порядок возрастания которого выше всех прочих, если среди полюсов, для которых вещественная часть $F(c, x)$ достигает наибольшего значения, не будет двух полюсов одинаковой кратности, тогда $B_n(f(x))$ попрежнему будет бесконечно расти при любых достаточно больших n. В противном случае, сохраняя только полюса $c_1, c_2, \ldots, c_k$ наивысшей кратности h, для которых $|e^{F(c_1, x)}|=\ldots=|e^{F(c_k, x)}|=M\geqslant 1$ максимальны, представим сумму асимптотических значений соответствующих им членов в виде

$$n^{h-\frac{1}{2}}M^n\sum_{s=1}^{k}P_s e^{inz_s}=H_n,$$

где P_s равен, с точностью до отличного от нуля множителя (зависящего от x и c_s, но не зависящего от n), старшему коэффициенту разложения Лорана близ полюса c_s, между тем как iz_s есть мнимая часть $F(c_s, x)$. Принимая во внимание, что все k значений e^{iz_s} различны, видим, что порядок возрастания H_n будет тот же, что $n^{h-\frac{1}{2}}M^n$, по крайней мере для одного из k последовательных значений $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1$ при любом n_0. В самом деле, допустим, что существует бесконечное множество значений n_0, для которых это утверждение ложно. Тогда k неизвестных $x_{n_0, s}=P_s e^{in_0 z_s}$ удовлетворяют системе k уравнений

$$\sum_{s=1}^{k}e^{itz_s}x_{n_0, s}=\frac{H_{n_0+t}}{(n_0+t)^{h-\frac{1}{2}}M^{n_0+t}}=\varepsilon_{n_0, t}\qquad (t=0, 1, \ldots, k-1),$$

главный определитель которой есть (не зависящий от n_0) определитель Вандермонда. При этом, так как правые части уравнений ε_{n_0+t} могут стать произвольно малы, $x_{n_0,s}$ должны были бы быть сколь угодно малыми, что невозможно, потому что $|x_{n_0, s}|=|P_s|$ имеют определенные отличные от нуля значения. Следовательно, по крайней мере для одного из k последовательных значений n многочлены $B_n(f(x))$ бесконечно возрастают.

З а м е ч а н и е. Вторая часть теоремы А, которая для мероморфной функции дает асимптотическое значение многочленов $B_n(f(x))$ в любой точке плоскости, без сомнения, могла бы быть распространена и на другие виды особенностей, и было бы интересно знать, верна ли она при любых особенностях. Во всяком случае, весьма правдоподобно, что если для некоторых функций $f(z)$ существуют точки сходимости x_0

многочленов $B_n(f(x))$, не удовлетворяющие услов о первой части теоремы А или не являющиеся по крайней мере предельными для точек, удовлетворяющих этому условию, то такие точки сходимости x_0 должны были бы быть изолированными. Не останавливаясь здесь на исследовании этого вопроса, назовем генеральной областью сходимости D_R функции $f(z)$, регулярной внутри некоторой области R, включающей отрезок 01, область D (являющуюся частью R), где сходятся многочлены $B_n(f(x))$ всех функций $f(z)$, регулярных в области R. Таким образом, из теоремы А вытекает

Следствие 8. *Условием, необходимым и достаточным* (предполагая, что функция $f(z)$ регулярна на отрезке 01) *для того, чтобы точка x принадлежала к границе $D'_{R'}$ генеральной области D_R сходимости многочленов $B_n(f(x))$ функции $f(z)$, является регулярность $f(z)$ внутри петли F_x и присутствие на F_x хотя бы одной особой точки, т. е. точки, принадлежащей к границе R' области регулярности R.*

Это следствие, которое в некотором роде аналогично теореме Коши о круге сходимости, вместе с тем существенно отличается от последней тем, что семейство концентрических окружностей в случае строки Тейлора зависит только от одного параметра, тогда как совокупность петель F_x зависит от двух параметров. Вследствие этого совокупность контуров $D'_{R'}$, которые могут быть границами генеральной области сходимости, зависит от бесконечного множества параметров (т. е. от произвольной функции). Принимая во внимание результаты § 5, получаем

Следствие 9. *Если $|x| \geqslant 1$, $|x-1| \geqslant 1$ и точка x принадлежит генеральной области сходимости D_R, то и вся область, ограниченная петлей F_x, принадлежит D_R.*

Следствие 10. *Если некоторая автономная область S является частью области регулярности R функции $f(z)$, то она является также частью генеральной области сходимости D_R; в частности, если $R=S$, то $D_R=S=R$.*

Таким образом, *область сходимости многочленов $B_n(f(x))$ совпадает с областью регулярности функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда последняя является автономной.* Кроме того, согласно следствию 3, *если во всех точках границы генеральной области сходимости D_R $|x| \geqslant 1$, $|x-1| \geqslant 1$, то область D_R автономна.*

Все результаты § 4—5 преобразуются благодаря теореме А и ее следствиям в соответствующие теоремы об областях сходимости многочленов $B_n(f(x))$. Например, первая часть следствия 5 приводит к предложению:

Если функция $f(x)$ регулярна внутри эллипса

$$\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}=1 \quad \left(p \geqslant q \geqslant p\sqrt{\frac{4p^2-1}{12p^2+1}}\right),$$

то многочлены $B_n(f(x))$ сходятся внутри этого эллипса *

* При этом, если $f(z)$ регулярна также на некоторой дуге C этого эллипса, то ни одна точка дуги C не лежит на границе D' генеральной области сходимости.

Известная теорема Канторовича соответствует частному случаю эллипса Чебышева, когда $p^2 = q^2 + \frac{1}{4}$.

Следует заметить, что весьма простое рассуждение, посредством которого Канторович получил свою теорему, применимо к весьма широкому классу $P_n(f(x))$, являющихся *линейными функционалами*, аппроксимирующими функцию $f(x)$ на данном отрезке и обладающими лишь следующими двумя элементарными свойствами многочленов $B_n(f(x))$: 1) *Если $f(x)$ есть многочлен степени h, то $P_n(f(x))$ также есть многочлен степени h; 2) если $|f(x)| \leqslant L$ на отрезке* 01, *то $|P_n(f(x))| \leqslant cL$ на этом отрезке, где c — не зависящая от $f(x)$ и от n постоянная.*

Обобщенная теорема Канторовича. *Если линейные функционалы $P_n(f(x))$, удовлетворяющие двум указанным выше условиям* *, *равномерно сходятся к $f(x)$ на отрезке* 01, *причем $f(x)$ регулярна внутри некоторого эллипса E Чебышева (имеющего фокусами точки* 0 *и* 1), *то многочлены $P_n(f(x))$ сходятся к $f(x)$ внутри эллипса E.*

Следуя Канторовичу, разлагаем $f(x)$ по многочленам Чебышева $T_n(x)$ для отрезка 01

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} A_h T_h(x).$$

Обозначая через $R > 1$ сумму осей эллипса E, имеем

$$\overline{\lim} \sqrt[h]{|A_h|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

С другой стороны, так как $|T_h(x)| \leqslant 1$ на отрезке 01, то, в силу второго из условий, характеризующих функционалы $P_n(f(x))$, имеем также

$$|P_n(T_h(x))| \leqslant C$$

на отрезке 01, причем степень многочленов $P_n(T_h(x))$ не выше h, вследствие первого из упомянутых выше условий. Поэтому, согласно известному свойству многочленов степени h, во всякой точке z внутри эллипса E имеем

$$|P_n(T_h(z))| < c\rho^h,$$

где $\rho < R$ — сумма осей эллипса, софокусного с E, проходящего через z. Итак, последовательность

$$P_n(f(z)) = \sum_{h=0}^{\infty} A_h(P_n(T_h(z)))$$

ограничена во всем эллипсе с суммой осей $\rho < R$:

$$|P_n(f(z))| < c \sum_{h=0}^{\infty} |A_h| \rho^h,$$

и по теореме Стильтьеса сходится в нем равномерно к функции $f(z)$.

---

* Второе из этих условий можно еще обобщить, заменив постоянную C через C_n, где $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{C_n} = 1$.

§ 7. Генеральная область сходимости многочленов $B_n(f(x))$, соответствующих одной особой точке

Перейдем теперь к решению общей задачи об определении генеральной области сходимости D_R, соответствующей данной области регулярности R.

Положим сначала, что $f(z)$ имеет только одну особую точку (вне отрезка 01), так что $R'=c$ — единственная граничная точка области R, лежащая на конечном расстоянии. Если петля F_x содержит внутри себя точку c, то x находится вне генеральной области сходимости D; напротив, x находится внутри области D, если c лежит вне петли F_x; поэтому границей D'_c области сходимости D в данном случае будет совокупность узлов x, петли которых F_x проходят через точку c. При этом следует заметить, что узлы x, обладающие свойством, что точка c находится на внешней ветви их узловой линии, лежат внутри D. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА В. *Если $c=a_0+ib_0$ (вне отрезка 01) есть единственная особая точка $f(z)$, то область сходимости многочленов $B_n(f(x))$ ограничена наружным контуром D'_c (который назовем* антипетлей *точки c) линии*

$$\left|\left(\frac{x-1}{c-1}\right)^{1-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{c}\right|=1, \qquad (34)$$

образующим внутренний угол $\frac{3}{2}\pi$ в точке $x=c$, являющейся двойной точкой линии (34), *и окружающим отрезок* 01.

Действительно, линия (34), которую мы можем назвать анти-узловой линией точки c, является геометрическим местом точек $x=\alpha+i\beta$, узловая линия которых проходит через c, поэтому все точки линии (34) находятся либо внутри области сходимости D, либо на ее границе D'_c.

Нетрудно проверить, что анти-узловая линия (34), уравнение которой может быть записано в виде

$$\Phi_c(\alpha,\beta)=P_x(a_0,b_0)=(1-a_0)\log\left|\frac{x-1}{c-1}\right|+$$
$$+a_0\log\left|\frac{x}{c}\right|+b_0\left[\arg\frac{c}{c-1}-\arg\frac{x}{x-1}\right]=0, \qquad (34\text{-bis})$$

ограничена, так как при $|x|\to\infty$, $P_x(a_0,b_0)\sim\log|x|\to\infty$. Кроме того, анти-узловая линия имеет (вне отрезка 01) лишь одну особую (двойную) точку $x=c$, вблизи которой $\Phi_c(\alpha,\beta)$ представляется как вещественная часть разложения

$$F(c,x)=(1-c)\log\left(1-\frac{c-x}{c-1}\right)+c\log\left(1-\frac{c-x}{c}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{(c-1)^{k-1}}-\frac{1}{c^{k-1}}\right](c-x)^k.$$

Уравнением пучка касательных в точке c будет поэтому

$$(a_0^2-a_0-b_0^2)(\alpha-a_0)^2+2b_0(2a_0-1)(\alpha-a_0)(\beta-b_0)-$$
$$-(a_0^2-a_0-b_0^2)(\beta-b_0)^2=0. \qquad (35)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (8), видим, что пучок касательных к анти-узловой линии совпадает с пучком касательных к узловой линии с тем же узлом, но внутренний угол между касательными к наружному контуру области, ограниченной линией (34), составляет в данном случае $\frac{3}{2}\pi$.

Рассмотрим для примера частный случай, когда особая точка $c = a_0 + ib_0$ находится на вещественной оси ($b_0 = 0$); положим для определенности * $c = a_0 > 1$ $\left(\text{если } a_0 < 0, \text{ то достаточно произвести зеркальное отображение около прямой } \alpha = \frac{1}{2}\right)$. Уравнение (34) можем представить в виде

$$[(\alpha - 1)^2 + \beta^2]^{\frac{1-a_0}{2}} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{a_0}{2}} = (a_0 - 1)^{1-a_0} a_0^{a_0}.$$

Вводя полярные координаты $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, имеем

$$[\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1]^{\frac{1-a_0}{2}} = (a_0 - 1)^{1-a_0}\left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{a_0},$$

и, разрешая это уравнение относительно $\cos\theta$, находим

$$\cos\theta = \frac{1}{2\rho}\left[1 + \rho^2 - (a_0 - 1)^2\left(\frac{\rho}{a_0}\right)^{\frac{2a_0}{a_0-1}}\right] = \varphi(\rho). \tag{36}$$

Таким образом антипетля D'_{a_0} получается, если в формуле (36) брать только наибольшее из значений ρ, приводящих к тому же самому значению $\varphi(\rho) = \cos\theta$. Из (36) видно, что $\varphi(a_0) = 1$, т. е. $\theta = 0$ при $\rho = a_0$; другой же корень ρ_0 уравнения $\varphi(\rho) = 1$ меньше a_0 (и соответствующая ему точка не может лежать на D'_{a_0}), так как

$$2\varphi'(\rho) = 1 - \frac{1}{\rho^2} - (a_0^2 - 1)\left(\frac{\rho}{a_0^{a_0}}\right)^{\frac{2}{a_0-1}}$$

имеет два корня: $a'_0 < a_0$ и a_0, между которыми $\varphi'(\rho) > 0$, причем $\varphi'(\rho) < 0$ вне промежутка $a'_0 a_0$; таким образом $\rho_0 < a'_0 < a_0$, и значения $\rho < \rho_0$, для которых $\varphi(\rho) > 1$, невозможны на анти-узловой линии; при росте ρ от ρ_0 угол θ растет от нуля до максимума, соответствующего $\rho = a'_0$, убывая снова до нуля при $\rho = a_0$. Вся эта часть анти-узловой линии вместе с ее симметричным относительно оси абсцисс отображением остается внутри антипетли D'_{a_0}. При дальнейшем росте $\rho \geqslant a_0$ мы уже находимся на антипетле D'_{a_0}: полярный угол θ на ней все время растет от 0 до π вместе с ρ, достигая значения π в точке оси абсцисс с отрицательной абсциссой $-x_0$, которая определяется из уравнения

$$1 + x_0 = (a_0 - 1)\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^{\frac{a_0}{a_0-1}}. \tag{37}$$

---

* Когда $c \to 1$, то уравнение (34) стремится к $|x| = 1$, т. е. пределом антипетли является окружность радиуса 1 с центром в 0.

Например, при $a_0=2$ уравнение (36) приводится к

$$\cos\theta=\frac{1}{2\rho}\left[1+\rho^2-\left(\frac{\rho}{2}\right)^4\right],$$

а уравнение (37) дает $x_0=2(1+\sqrt{2})$. Ординаты y_0 точек пересечения антипетли D'_{a_0} с осью ординат, определяемые, вообще, из уравнения $\varphi(\rho)=0$ или [см. (36)] $1+\rho^2=(a_0-1)^2\left(\frac{\rho}{a_0}\right)^{\frac{2a_0}{a_0-1}}$, в случае D'_2 удовлетворяют уравнению $1+\rho^2=\frac{\rho^4}{16}$, откуда $y_0^2=8+\sqrt{80}$. Ординаты y_1 точек пересечения D'_2 с прямой $\alpha=2$ определяются из уравнения $1+y_1^2=$ $=\frac{(4+y_1^2)^2}{16}$, дающего $y_1^2=8$ для двух точек, отличных от узла ($\alpha=2$, $y_1=0$).

§ 8. Нахождение генеральной области сходимости D_R в случае любой области R регулярности

В общем случае, когда границей области R регулярности функции $f(z)$ (включающей промежуток 01) является любое замкнутое множество R', применение теоремы B ко всем точкам границы R' приводит к следующему общему результату:

ТЕОРЕМА C. *Если R' есть граница области R регулярности функции $f(z)$ (не содержащая внутренних точек отрезка* 01), *то генеральной областью D_R сходимости многочленов $B_n(f(x))$ является область, заключенная внутри антипетель всех точек множества R'.*

В частности, *если $f(z)$ имеет только две сопряженные особые точки a_0+ib_0 $(b_0>0)$, то границей $D'_{a_0\pm ib_0}$ области сходимости будет верхняя часть антипетли $D_{a_0+ib_0}$ точки a_0+ib_0 и ее зеркальное отображение*, так как из (34-bis) видно, что

$$P_x(a_0,\,-b_0)=P_x(a_0,\,b_0)+2b_0\arg\frac{x}{x-1};$$

поэтому обе антипетли $D'_{a_0+ib_0}$ и $D_{a_0-ib_0}$ пересекаются лишь на оси абсцисс, причем $P_x(a_0,\,-b_0)<0$ в точке $x=a_0+ib_0$, откуда следует, что вся верхняя часть антипетли $D'_{a_0+ib_0}$ точки a_0+ib_0 находится внутри антипетли $D'_{a_0-ib_0}$ сопряженной точки.

Пусть, например, $a_0=1$; тогда уравнение (34-bis) для точки $c=1+ib_0$ превратится в

$$\log\frac{|x|}{\sqrt{1+b_0^2}}+b_0\left[\arg c-\frac{\pi}{2}-\arg\frac{x}{x-1}\right]=0,$$

или, обозначая через ψ положительный угол, под которым отрезок 01 виден из точки x,

$$|x|=\sqrt{1+b_0^2}\,e^{b_0\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{b_0}-\psi\right)}. \tag{38}$$

При $\psi=0$ получаем точки пересечения с осью абсцисс: $x_0=\pm\sqrt{1+b_0^2}\,e^{b_0\operatorname{arctg}\frac{1}{b_0}}$; при возрастании ψ каждому его значению соответствуют две точки антипетли D'_{1+ib_0}, лежащие на пересечении

окружности C'', из точек которой отрезок 01 виден под углом ψ, с окружностью с центром в 0, радиус которой, определяемый уравнением (38), убывает, достигая наименьшего значения $\sqrt{1+b_0^2}$, когда * $\psi = \operatorname{arctg}\frac{1}{b_0}$, тогда обе точки антипетли D'_{1+ib_0}, постепенно сближаясь, совмещаются в узле $c = 1 + ib_0$, образуя таким образом всю верхнюю часть антипетли D'_{1+ib_0}; присоединяя к ней ее зеркальное отображение, получим границу $D'_{1\pm ib_0}$ генеральной области сходимости, соответствующей паре особых точек $1 \pm ib_0$.

Следует также заметить, что если $b_1 > b_0$, то область $D'_{1\pm ib_0}$ сходимости, соответствующая паре особых точек $1 \pm ib_0$, находится целиком внутри контура $D'_{1\pm ib_1}$, так как

$$\sqrt{1+b_1^2}\, e^{b_1\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{b_1} - \psi\right)} > \sqrt{1+b_0^2}\, e^{b_0\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{b_0} - \psi\right)}$$

при $\psi \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{b_1} < \operatorname{arctg}\frac{1}{b_0}$. Поэтому $D'_{1\pm ib_0}$ будет границей генеральной области сходимости, когда множество особых точек R' функции $f(z)$ будет состоять из любых точек с абсциссой 1, среди которых ближайшими к отрезку 01 являются точки $1 \pm ib_0$. Последнее замечание, значительно облегчающее практическое применение теоремы C, может быть обобщено. Назовем лучами отрезка 01 лучи, выходящие перпендикулярно к отрезку 01 из любой его точки или выходящие под тупым углом к 01 из концов 0 и 1 отрезка. Множеством R''_f ближайших к отрезку 01 особенностей функции $f(z)$ назовем множество, состоящее из всех точек границы R' области регулярности функции $f(z)$, в которых каждый из рассматриваемых лучей впервые достигает R'.

Следствие 11. *Если R''_f есть множество ближайших к отрезку 01 особенностей функции $f(z)$, то $D'_{R'} = D'_{R''}$.*

Для доказательства достаточно убедиться, что антипетли, узлы которых лежат на одном и том же луче, не могут пересекаться, т. е. что петля с любым узлом x не может иметь двух точек $a_0 + ib_0$, $a_1 + ib_1$ на одном и том же луче. Рассмотрим сначала перпендикулярный луч: $0 \leqslant a_0 = a_1 \leqslant 1$, $0 < b_0 < b_1$. Если бы обе точки $a_0 + ib_0$, $a_0 + ib_1$ находились на петле F_x, мы имели бы $P_x(a_0, b_0) = P_x(a_0, b_1) = 0$ и $P_x(a_0, b) > 0$ при $b_0 < b < b_1$; следовательно, $P_x(a_0, b)$ достигало бы максимума для некоторого $b = b_2 > 0$, и в этой точке мы должны были бы иметь

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial b^2} = \frac{a_0}{a_0^2 + b_0^2} - \frac{a_0 - 1}{(a_0 - 1)^2 + b_0^2} \leqslant 0,$$

что невозможно при $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$. Рассмотрим также случай неперпендикулярного луча, когда $b_0 = m(a_0 - 1)$, $b_1 = m(a_1 - 1)$, $m \geqslant 0$, $a_1 > a_0 > 1$. Из $P_x(a_0, m(a_0 - 1)) = P_x(a_1, m(a_1 - 1))$ мы, подобно предыдущему,

* Дальнейшее увеличение $\psi > \operatorname{arctg}\frac{1}{b_0}$ соответствует «паразитной» части антиугловой линии, находящейся внутри ее наружного контура D'_{1+ib_0}.

должны были бы заключить [пользуясь второй из формул (17)], что для некоторого a ($a_0 < a < a_1$)

$$\frac{d^2P_x}{da^2}=\frac{1}{a-1}-\frac{a+m^2(a-2)}{a^2+m^2(a-1)^2}=\frac{a+m^2(a-1)}{(a-1)[a^2+m^2(a-1)^2]}\leqslant 0,$$

что невозможно, так как $a > a_0 > 1$.

Отсюда же вытекает

Следствие 12. *Граница автономной области S имеет одну и только одну точку на каждом луче отрезка* 01.

Из предыдущего вытекает также следующее свойство автономных областей, которое можно было бы принять за их определение.

Следствие 13. *Для того чтобы область S была автономна, необходимо и достаточно, чтобы антипетля всякой точки ее границы охватывала целиком область S.*

Кроме того докажем

Следствие 14. *Если* $|x| \geqslant 1$, $|x-1| \geqslant 1$, *то область, ограниченная антипетлей D'_x, автономна.*

В самом деле, в силу следствия 7, из $|x'| \leqslant 1$ вытекает, что все точки x петли $F_{x'}$ удовлетворяют тому же неравенству $|x| \leqslant 1$; точно так же из $|x'-1| \leqslant 1$ следует, что все точки петли $F_{x'}$ удовлетворяют неравенству $|x-1| \leqslant 1$. Поэтому все точки x' антипетли D'_x удовлетворяют неравенству $|x'| \geqslant 1$, $|x'-1| \geqslant 1$. Но, если бы область, ограниченная антипетлей D'_x, не была автономна, то на D'_x существовала бы такая точка ξ, что ее петля F_ξ пересекла бы D'_x в некоторой точке x', петля которой $F_{x'}$ проходила бы также через точку x; но это противоречит следствию 1 и лемме 3.

§ 9. Случай, когда границей области регулярности R является прямая, параллельная оси ординат

Рассмотрим более подробно случай, когда область R регулярности функции $f(z)$ ограничена прямой $a=c>1$. Согласно предыдущему, генеральная область сходимости D включает в себя все точки x, петли которых F_x не имеют точек на прямой $a=c$, причем точки x, петли которых пересекают эту прямую, лежат вне области D; поэтому границей D' области сходимости D будет служить геометрическое место точек $x=\alpha+i\beta$, находящихся на прямой $a=c$ или являющихся узлами петель, касательных к этой прямой. Обозначая через b_0 ординату единственной точки петли F_x, находящейся на прямой $a=c$, мы должны иметь таким образом

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha}{\beta}=\frac{c^2+b_0^2-c}{b_0}, \tag{39}$$

так как точка $c+ib_0$ петли F_x с вертикальной касательной лежит на второй узловой окружности, и

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2+b_0^2}\right)^{\frac{c}{2}}\left[\frac{(\alpha-1)^2+\beta^2}{(c-1)^2+b_0^2}\right]^{\frac{1-c}{2}}=1. \tag{40}$$

Напомним, что при $\beta^2 \leqslant \alpha^2 - \alpha$ (внутри правой ветви гиперболы Г) крайней правой точкой петли F_x является ее узел: $\alpha = c$, $\beta = b_0$; поэтому отрезок прямой $a = c$, где $|b_0| \leqslant \sqrt{c^2 - c}$, служащий хордой гиперболы Г, принадлежит границе D' области D. Если $\beta^2 \leqslant \alpha^2 - \alpha < c^2 - c$, т. е. если узел x находится внутри сегмента гиперболы, образованного прямой $a = c$ или внутри симметричного ему левого сегмента гиперболы Г, то соответствующая ему петля F_x не достигает этой прямой. Таким образом всякая другая точка $x = \alpha + i\beta$ контура D' либо удовлетворяет неравенству $\beta^2 > \alpha^2 - \alpha$, т. е. (если полагать для определенности $\beta > 0$) находится на верхней половине своей второй узловой окружности (39), либо $\alpha^2 - \alpha > c^2 - c$. Во всяком случае, точка касания $c + ib_0$ должна находиться на нижней половине той же окружности, так как при возрастании b $P_x(c, b)$ достигает максимума при $b = b_0$, а потому $\frac{\partial P_x}{\partial b}$ переходит от положительных значений к отрицательным [т. е. прямая $a = c$ входит здесь внутрь окружности (39)]. Следовательно, из двух значений b_0, удовлетворяющих уравнению (39) всегда нужно брать меньшее по модулю, т. е. $|b_0| \leqslant \sqrt{c^2 - c}$ и вместе с тем $|b_0| \leqslant |\beta|$, так как в случае $\beta^2 > \alpha^2 - \alpha$ узел x находится выше, а точка $c + ib_0$ находится ниже горизонтального диаметра соответствующей окружности; в случае же $\alpha^2 - \alpha > c^2 - c$ один из корней уравнения (39) менее $|\beta|$ по модулю.

Таким образом, полагая $b_0 = t\beta$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, имеем для определения криволинейной части контура D':

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}{c^2 + t^2\beta^2 - c} = \frac{1}{t},$$

откуда

$$\beta^2 = \frac{c^2 - c - t(\alpha^2 - \alpha)}{t - t^2}, \tag{41}$$

и

$$\left\{\frac{\alpha^2(t - t^2) + (c^2 - c) - t(\alpha^2 - \alpha)}{c^2(t - t^2) + t^2[c^2 - c - t(\alpha^2 - \alpha)]}\right\}^c \times$$
$$\times \left\{\frac{(\alpha - 1)^2(t - t^2) + c^2 - c - t(\alpha^2 - \alpha)}{(c - 1)^2(t - t^2) + t^2[c^2 - c - t(\alpha^2 - \alpha)]}\right\}^{1-c} = 1. \tag{40-bis}$$

Дроби, находящиеся в первой части (40-bis) сокращаются соответственно на $\alpha t - c$ и $(\alpha - 1)t + (1 - c)$. После этого сокращения уравнение (40-bis) приводится к виду

$$\left\{\frac{1 - c - \alpha t}{t[(1 - \alpha)t - c]}\right\}^c \left\{\frac{(1 - \alpha)t - c}{t[1 - c - \alpha t]}\right\}^{1-c} = 1,$$

т. е.

$$\left[\frac{\alpha t + c - 1}{(\alpha - 1)t + c}\right]^{2c-1} = t. \tag{42}$$

Полагая

$$t = \frac{1}{(1 + u)^{2c-1}}, \qquad u \geqslant 0, \tag{43}$$

выводим из (42)

$$\alpha = \frac{1}{u}\left\{-1 + (1 + u)^{2c-1}[1 - (c - 1)u]\right\} \tag{44}$$

и из (41), (43) и (44) находим

$$\beta^2 = \frac{(1+u)^{2c}}{u^2}\left\{1-(1+u)^{2c-2}\left[1-(c-1)\,u\right]^2\right\}. \tag{45}$$

Таким образом, уравнения (44) и (45) определяют координаты α, β точек криволинейной части ($\alpha < c$) контура D' в виде функций параметра $u > 0$ (при $u \to 0$ находим $\alpha = c$, $\beta^2 = c^2 - c$, что соответствует точке, где криволинейная часть контура смыкается с его прямолинейным отрезком прямой $\alpha = c$).

К тому же результату можно притти и другим путем, ограничиваясь только рассмотрением функций вида

$$f(z) = \int\limits_0^\infty e^{b\,(z-c)}\,d\psi(b), \tag{46}$$

где $\psi(b)$ — функция с ограниченной вариацией, так что $f(z)$ (представляющая разность между двумя абсолютно монотонными функциями при $z < c$) регулярна в левой полуплоскости $\alpha < c$. Из предыдущего следует, что сходимость многочленов $B_n(f(x))$ для всех функций (46) обеспечена внутри контура D', определяемого уравнениями (44) и (45) и дополненного соответствующим отрезком прямой $\alpha = c$. Докажем это другим способом, из которого видно будет, что в данном случае точки на контуре D' также являются точками сходимости. Для этого заметим, что

$$B_n\ (f(x)) = \int\limits_0^\infty \sum_0^n C_n^m e^{h\left(\frac{m}{n}-c\right)} x^m (1-x)^{n-m}\,d\psi(h) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[xe^{\frac{h}{n}} + 1 - x\right]^n e^{-hc}\,d\psi(h). \tag{47}$$

В силу теоремы Стильтьеса-Витали, достаточно доказать ограниченность $B_n(f(x))$ во всех точках рассматриваемого контура. Но

$$|B_n(f(x))| < \int\limits_0^\infty |d\psi(h)|,$$

во всех точках $x = \alpha + i\beta$, где

$$\left|xe^{\frac{h}{n}} + (1-x)\right| \leqslant e^{\frac{hc}{n}}$$

при всех $h \geqslant 0$, или, полагая $e^{\frac{h}{n}} = 1 + u \quad (u \geqslant 0)$,

$$|xu + 1|^2 = (1+\alpha u)^2 + \beta^2 u^2 \leqslant (1+u)^{2c}; \tag{48}$$

поэтому для сходимости достаточно, чтобы точка x находилась внутри всех окружностей

$$\left(\alpha + \frac{1}{u}\right)^2 + \beta^2 = \left[\frac{(1+u)^c}{u}\right]^2 \quad (u \geqslant 0). \tag{48-bis}$$

Область, определяемая этим свойством, должна, очевидно, находиться между горизонтальными прямыми

$$\pm \beta = \min \frac{(1+u)^c}{u} = \frac{c^c}{(c-1)^{c-1}}, \tag{49}$$

причем это значение соответствует верхней и нижней точке области сходимости, где $\alpha = -\frac{1}{u} = 1 - c$. С другой стороны

$$-\frac{1}{u}\left[(1+u)^c + 1\right] \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{u}\left[(1+u)^c - 1\right] \qquad (u \geqslant 0),$$

и так как правая часть минимальна при $u = 0$, то $\alpha \leqslant c$; левая же часть максимальна, когда

$$(1+u)^{c-1}\left[(c-1)u - 1\right] = 1. \tag{50}$$

Удовлетворяющее этому уравнению значение $u = u_0$, которое является наибольшим приемлемым значением u, при всяком $c > 1$ заключено между $\frac{1}{c-1}$ и $\frac{2}{c-1}$. Поэтому, обозначая через $-x_0$ абсциссу крайней слева точки сходимости, имеем

$$x_0 = \frac{(1+u_0)^c + 1}{u_0} = c\,(1+u_0)^{c-1},$$

откуда $u_0 = \frac{1 + \frac{c}{x_0}}{c-1}$, и, следовательно, x_0 удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{x_0+1}{c-1}\right)^{c-1} = \left(\frac{x_0}{c}\right)^c. \tag{37-bis}$$

Вообще, из (48) получаем, что сходимость имеет место при

$$\beta^2 \leqslant \min\left[\frac{(1+u)^{2c}}{u^2} - \left(\alpha + \frac{1}{u}\right)^2\right], \tag{51}$$

где α — любое число между $-x_0$ и c. Значение u, соответствующее минимуму правой части (51), определяется из уравнения

$$2cu\,(1+u)^{2c-1} - 2\alpha u\,(\alpha u + 1) - 2\,(1+u)^{2c} + 2\,(\alpha u + 1)^2 = 0,$$

или, после упрощения,

$$(1+u)^{2c-1}\left[(c-1)\,u - 1\right] + \alpha u + 1 = 0. \tag{52}$$

Решая уравнение (52) относительно α, получаем уравнение (44) и, подставляя найденное значение в (51), находим второе параметрическое уравнение (45) граничного контура D' (вместе с $\beta^2 \leqslant c^2 - c$, при $\alpha = c$, соответствующим прямолинейному отрезку контура D').

Формулы (44) и (45) могут быть также использованы для нахождения генеральной области сходимости, когда областью регулярности является прямоугольник R_b с вершинами $(c, \pm b)$ и $(1-c, \pm b)$, где $c^2 - c \leqslant b^2$. Мы уже видели, что в случае $c^2 - c = b^2$ область сходимости D_b совпадает с областью R_b, так как она автономна. Если же $b = \infty$, то, поскольку область сходимости D_∞ симметрична относительно пря-

мой $\alpha=\frac{1}{2}$, она заключена между прямыми $\alpha=c$ и $\alpha=1-c$ и ограничена сверху и снизу контуром, который при $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ определяется формулами (44) и (45), а при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ — формулами, получающимися из (44) и (45) заменой α через $1-\alpha$. Эта область $D_b=D_\infty$ сохраняется неизменной при уменьшении b, пока $b \geqslant y_0$, где y_0 — ордината наивысшей точки области D_∞; при дальнейшем уменьшении высоты $b^2 \geqslant c^2-c$ прямоугольника регулярности R_b область сходимости D_b сокращается за счет участка D_∞, выходящего из R_b: именно, при значениях α, близких к $\frac{1}{2}$, для которых формула (45) дает $\beta^2 > b^2$, нужно полагать $\beta^2=b^2$, т. е. срезать область D_α горизонтальными сторонами прямоугольника R_b.

Заметим еще, что формулы (44) и (45) становятся иллюзорными при $c=1$. Но если составить из них

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{u^2}\{1+(1+u)^{2c-1}[(2c-1)u-1]\},$$

то для $c \to 1$ находим уравнение

$$\alpha^2+\beta^2=1,$$

совпадающее с уравнением антипетли точки $c=1$ [согласно уравнению (34)], так что в этом случае область сходимости D представляет круг радиуса x с центром в 0. Таким образом, если, например, областью регулярности R является прямоугольник с вершинами $(0, \pm h)$ и $(1, \pm h)$, где $h \leqslant \frac{1}{2}$, то областью сходимости служит часть прямоугольника, находящаяся внутри кругов радиуса 1 с центрами в концах отрезка 01.

Примеры. 1) Пусть $c=\frac{3}{2}$; тогда уравнение (37) обращается в

$$\left(\frac{2x_0}{3}\right)^3=2x_0+2,$$

откуда $x_0=3$; следовательно, абсциссы α точек области сходимости D заключены между $\frac{3}{2}$ и -3; согласно (49), ординаты этих точек заключены между $+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Уравнения (44) и (45) обращаются в

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{u}\left[-1+(1+u)^2\left(1-\frac{u}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}-\frac{u^2}{2},\\ \beta^2&=\frac{(1+u)^3}{u^3}\left[1-(1+u)\left(1-\frac{u}{2}\right)^2\right]=\frac{3-u}{4}(1+u)^3,\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

где u изменяется от 0 до 3 $\left(\text{на замыкающем отрезке контура } \alpha=\frac{3}{2},\ \beta^2 \leqslant \frac{3}{4}\right)$.

Исключая u из уравнений (53), получим алгебраическое уравнение четвертой степени

$$4\beta^2 = (3-\sqrt{3-2\alpha})(1+\sqrt{3-2\alpha})^3 = 12-4\alpha^2+8\sqrt{3-2\alpha},$$

или

$$(\alpha^2+\beta^2-3)^2 = 4(3-2\alpha); \tag{54}$$

при этом область сходимости D ограничена внешней частью цикла, образуемого кривой (54), которая касается прямой $\alpha=\frac{3}{2}$ в точках $\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; внутренняя же дуга кривой (54), имеющая точку возврата при $\alpha=1$, $\beta=0$, должна быть заменена отрезком этой прямой между указанными точками касания.

Интересно сопоставить уравнение (54) с уравнением (36) анти-узловой линии точки $c=\frac{3}{2}$, которое приводится к виду

$$16\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{9}\right)^3 = (\alpha-1)^2+\beta^2, \tag{36-bis}$$

где антипетле соответствуют только значения $\alpha^2+\beta^2 \geqslant \frac{9}{4}$. Как всегда, лежащие на оси абсцисс точки $-x_0$ и $c=a_0$ границы D' области сходимости, соответствующей области регулярности $\alpha<c$, находятся на антипетле D'_{a_0} точки a_0; все же прочие точки D' лежат внутри D'_{a_0}.

Замечание. *Значение $c=\frac{3}{2}$ является единственным рациональным числом* ($c>1$), *при котором решение $x_0>0$ уравнения* (37-bis) [*или* (37) *при $a_0=c$*] *также рационально.*

В самом деле, положим

$$\frac{x_0}{c}=\frac{q}{p}, \quad \frac{x_0+1}{c-1}=\frac{q_1}{p_1},$$

где q, p и q_1, p_1 — две пары взаимно простых положительных чисел. Отсюда

$$c=\frac{p(q_1+p_1)}{pq_1-qp_1}, \quad c-1=\frac{p_1(q+p)}{pq_1-qp_1},$$

так что уравнение (37-bis) принимает вид

$$\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{p_1(q+p)} = \left(\frac{q}{p}\right)^{p(q_1+p_1)}.$$

Следовательно, необходимо, чтобы

$$p=A^m,\ q=B^m,\ p_1=A^{m_1},\ q_1=B^{m_1},$$

где $m\geqslant 0$, $m_1\geqslant 0$ — целые числа, $A\geqslant 1$, $B\geqslant 1$ — целые взаимно простые числа, причем

$$mp(q_1+p_1)=m_1p_1(p+q),$$

т. е.

$$mA^mB^{m_1}+(m-m_1)A^{m+m_1}-m_1A^{m_1}B^m=0$$

Вследствие $q_1p - qp_1 > 0$, имеем $\delta = m - m_1 > 0$, и так как необходимо, чтобы $\delta = yB^{m_1}$, где y — целое положительное число, то по сокращении на $(AB)^{m_1}$ получаем

$$mA^\delta + yA^m - m_1B^\delta = 0.$$

Поэтому $B > 1$ и $m_1 = y_1A^\delta$, где $y_1 > 0$ — целое число; в таком случае из

$$\delta = yB^{y_1A^\delta}$$

следует, что $A = 1$, т. е. $m_1 = y_1$ и

$$\delta + y_1 + y = y_1B^\delta; \quad \delta = yB^{y_1} \qquad (B > 1). \tag{55}$$

Следовательно, $\delta \geqslant y + y_1$, причем знак равенства имеет место лишь при $y_1 = y = 1$, $B = \delta = 2$, и оба равенства (55) тогда соблюдены; но если $\delta > y + y_1$, то первое из равенств (55) влечет за собой

$$2\delta > B^\delta \quad (\delta > 2),$$

которое при $B \geqslant 2$ невозможно. Таким образом, необходимо, чтобы $B = \delta = 2$, $y = y_1 = A = 1$, откуда $p = p_1 = 1$, $q_1 = 2$, $q = 2^3 = 8$, поэтому $\frac{x_0}{c} = 2$, $\frac{x_0 + 1}{c - 1} = 8$, и, следовательно, $c = \frac{3}{2}$, $x_0 = 3$.

2) Пусть $c = 2$; тогда уравнение (37-bis) обратится в

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 = x_0 + 1,$$

откуда $x_0 = 2(1 + \sqrt{2})$ и $-2(1 + \sqrt{2}) \leqslant \alpha \leqslant 2$; согласно (49) $|\beta| \leqslant 4$. Уравнения (44) и (45) получают вид

$$\alpha = 2 - 2u^2 - u^3, \quad \beta^2 = (1 + u)^4(2 - u^2) \quad (0 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}). \tag{56}$$

Для исключения u возведем в квадрат первое уравнение и сложим со вторым; полагая $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2$, получим

$$\rho^2 = 6 + 8u + 3u^2 \qquad (\rho^2 \geqslant 6).$$

Беря положительный корень $u = \frac{-4 + \sqrt{3\rho^2 - 2}}{3}$ и подставляя его в первое из уравнений (56), находим

$$9\alpha = 2\rho^2 + 6 + u(2 - 3\rho^2) = 2\rho^2 + 6 + \frac{12\rho^2 - 8 - (3\rho^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{3} =$$

$$= 6\rho^2 - \frac{10}{3} - \frac{1}{3}(3\rho^2 - 2)^{\frac{3}{2}}$$

(α убывает с возрастанием ρ). Симметричная относительно оси абсцисс часть этой кривой 6-го порядка, соответствующая значениям ρ при $6 \leqslant \rho^2 \leqslant 12 + 8\sqrt{2}$, образует криволинейную часть контура D', замыкаемую отрезком $\beta^2 \leqslant 2$ прямой $\alpha = 2$, которой она касается в точках $(2, \pm\sqrt{2})$.

Этих двух примеров достаточно для получения ясного представления о форме и размерах области сходимости D, соответствующей области R регулярности $\alpha < c > 1$.

§ 10. Случай, когда функция $f(x)$ имеет особенности на отрезке 01

При выводе основных формул (2) и (3) мы предполагали функцию $f(z)$ регулярной на всем отрезке 01, а поэтому это предположение сохранялось и в дальнейших выводах. Однако, вводя соответствующие дополнения в формулировки теорем, можно распространить их и на тот случай, когда $f(z)$ имеет особенности на отрезке 01.

Для этого заметим прежде всего, что если контур интегрирования C в формуле (2) пересекает отрезок 01 в одной или двух точках $a_0 < a_1$, то эта формула заменится формулой

$$B_{n,\,a_0a_1}\bigl(f(x)\bigr) = \sum_{m=[a_0n]+1}^{[a_1n]} C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C f(z) \frac{(x-1)^{n(1-z)} x^{nz}\, dz}{z(nz-1)\ldots(nz-n)}, \tag{2-bis}$$

лишь бы a_0n и a_1n не были целыми числами *. Асимптотическое преобразование, приводящее формулу (2) к формуле (3), может быть сделано и здесь при условии, что

$$\left|\frac{x-1}{1-a_0}\right|^{1-a_0} \left|\frac{x}{a_0}\right|^{a_0} < 1, \quad \left|\frac{x-1}{1-a_1}\right|^{1-a_1} \left|\frac{x}{a_1}\right|^{a_1} < 1. \tag{57}$$

Действительно, в таком случае в точке a_0 (или a_1), где асимптотическое преобразование неприменимо, мы имеем

$2\,|(na_0-1)(na_0-2)\ldots(na_0-n)| > (na_0-[na_0])\,([na_0]-1)!\,(n-[na_0]-1)!,$

поэтому **

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{|(na_0-1)\ldots(na_0-n)|}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{[na_0-1]!\,(n-[na_0]-1)!}} = \frac{1}{(1-a_0)^{1-a_0}\, a_0^{a_0}},$$

и, следовательно, на контуре C вблизи a_0 (и a_1) подинтегральная функция стремится к нулю. Таким образом при условии (57) формула (2-bis) преобразуется в асимптотическую формулу

$$B_{n,\,a_0a_1}\bigl(f(x)\bigr) \backsim \frac{1}{i}\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int\limits_C f(z) \left[\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z} \left(\frac{x}{z}\right)^z\right]^n dz. \tag{58}$$

Из (58) вытекает следующий вариант теоремы А:

ТЕОРЕМА A-bis. *Если функция $f(z)$ регулярна на петле F_x точки x и внутри F_x, причем петля F_x пересекает отрезок* 01 *в одной или двух точках $a_0' < a_1'$, и если $f(z)$ ограничена на всем отрезке* 01, *то*

$$\lim_{n=\infty} B_n\bigl(f(x)\bigr) = f(x). \tag{59}$$

Действительно, выбирая контур C достаточно близко к F_x, чтобы

---

* Очевидно, что при любых $a_0 < a_1$ это осуществляется для бесчисленного множества целых значений n. Точно так же всегда существует бесчисленное множество значений n, для которых $a_0n - [a_0n] > (1-\varepsilon)^n$, $a_1n - [a_1n] > (1-\varepsilon)^n$, как бы ни было мало данное $\varepsilon > 0$.

** См. предыдущую сноску.

формула (58) была применима, найдем, как при доказательстве теоремы А, что

$$\lim_{n=\infty} B_{n,\, a_0 a_1}(f(x)) = f(x), \qquad (59\text{-bis})$$

где $a_0 < a_0'$, $a_1 > a_1'$. Но благодаря условию (57), каждый из членов $B_n(f(x))$, не входящих в $B_{n,\, a_0 a_1}(f(x))$, менее n-го члена некоторой убывающей геометрической прогрессии; поэтому

$$\lim_{n=\infty} | B_n(f(x)) - B_{n,\, a_0 a_1}(f(x)) | = 0.$$

Из нашего рассуждения следует также, что формула (59) остается в силе и в том случае, когда $f(z)$ безгранично растет на отрезке 01 вне петли F_x, если только при построении многочленов $B_n(f(x))$ берутся вместо значений $f\left(\frac{m}{n}\right)$ вне промежутка $a_0'a_1'$ любые ограниченные числа.

Отсюда вытекает любопытный факт, замеченный Л. В. Канторовичем, что если функция $f(z)$ на отрезке 01 склеена из нескольких различных аналитических функций, то в некоторых областях плоскости комплексной переменной многочлены $B_n(f(x))$ сходятся к каждой из них.

Распространяя данное ранее определение антипетли точки c на случай, когда c находится на отрезке 01 $(0 \leqslant c \leqslant 1)$, находим, что антипетля точки c, *т. е. геометрическое место точек, петли которых проходят через c, имеет уравнение*

$$|x-1|^{1-c}|x|^c = (1-c)^{1-c}c^c \qquad (0 \leqslant c \leqslant 1). \qquad (60)$$

Уравнение (60) [являющееся пределом уравнения (34) при $b_0 \to 0$] представляет лемнискату с двойной точкой c: при этом левая часть лемнискаты соответствует узлам петель F_x, для которых c является правой точкой пересечения с осью абсцисс, а правая ее часть соответствует петлям, для которых c служит левой точкой пересечения с осью абсцисс.

Таким образом из предыдущего вытекает также полное решение вопроса о генеральных областях сходимости многочленов $B_n(f(x))$ к каждой из аналитических функций, из которых составлена на отрезке 01 функция $f(x)$.

Следствие 15. *Пусть функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: $f(x)$ ограничена на всем отрезке 01; в каждом из промежутков $0a_1$, a_1a_2, ..., a_k1 отрезка 01 она совпадает соответственно с аналитическими функциями $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_k(x)$, регулярными* внутри соответствующего промежутка. Тогда, если D_0, D_1, ..., D_k — генеральные области сходимости, определяемые соответственно лежащими вне отрезка 01 особенностями функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_k(x)$, то многочлены $B_n(f(x))$ сходятся к $f_0(x)$ внутри области, общей D_0 и левому овалу лемнискаты*

$$|x-1|^{1-a_1}|x|^{a_1} = (1-a_1)^{1-a_1}a_1^{a_1}; \qquad (61)$$

внутри области, общей D_1, правому овалу лемнискаты (61) и левому овалу лемнискаты

$$|x-1|^{1-a_2}|x|^{a_2} = (1-a_2)^{1-a_2}a_2^{a_2},$$

* В частности, они могут быть ветвями одной и той же многозначной функции.

они сходятся к $f_1(x)$ *и т. д.; наконец, внутри области, общей* D_h *и правому овалу лемнискаты*

$$|x-1|^{1-a_k}|x|^{a_k}=(1-a_k)^{1-a_k}a_k^{a_k},$$

многочлены $B_n(f(x))$ *сходятся к* $f_k(x)$.

Например, многочлены

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

стремятся к нулю внутри левого овала лемнискаты

$$|x(1-x)|=\frac{1}{4}$$

и стремятся к единице внутри правого овала этой лемнискаты.

§ 11. Области сходимости многочленов $A_n(f(x))$ и асимптотическая форма областей сходимости многочленов $B_n(f(x))$ при бесконечном удалении особых точек функции $f(x)$

Как нетрудно видеть, все вышеизложенное без труда применяется к многочленам

$$B_n(f(z);x,h)=B_n\left(f(hz);\frac{x}{h},1\right)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{hm}{n}\right)C_n^m\left(\frac{x}{h}\right)^m\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-m}, \tag{62}$$

соответствующим при данном $h>0$ отрезку $0h$. Область сходимости многочленов $B_n(f(z);x,h)$ подобна, таким образом, области сходимости многочленов $B_n(f(hz);x,1)$.

Если $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная в точке 0, то

$$\lim_{h=0} B_n(f(z);x,h)=A_n(f(x))=$$
$$=\lim_{h=0}\sum_{m=0}^{n}\left[f(0)+m\Delta f(0)+\frac{m(m-1)}{2}\Delta_2 f(0)+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[C_n^m\left(\frac{x}{h}\right)^m\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-m}\right],$$

где конечные разности соответствуют приращениям $\frac{h}{n}$ переменной x. Поэтому

$$A_n(f(x))=\lim_{h=0}\left[f(0)+n\Delta f(0)\cdot\frac{x}{h}+\frac{n(n-1)}{2}\Delta_2 f(0)\left(\frac{x}{h}\right)^2+\ldots\right]=$$
$$=f(0)+f'(0)x+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{f^k(0)}{k!}x^k+\ldots+f^n(0)\frac{x^n}{n^n}. \tag{63}$$

Вообще, при всяком $h > 0$ формула (62), подобно формуле (1), преобразуется к виду

$$B_n\left(f(z);\, x,\, h\right) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C_h} \frac{f(z)\left[(x-h)^{1-\frac{z}{h}} x^{\frac{z}{h}}\right]^n}{z\,(nz-h)\dots(nz-nh)}\, dz,$$

где C_h — любой контур, окружающий отрезок $0h$, внутри которого $f(z)$ регулярна. При $h \to 0$ получаем

$$A_n\left(f(x)\right) = \frac{n!}{2\pi i} \lim_{h=0} \int\limits_{C} \frac{f(z)\, x^n}{n^n\, z^{n+1}} \left[\left(1-\frac{h}{x}\right)^{1-\frac{z}{h}}\right]^n dz = \frac{n!x^n}{2\pi i n^n} \int\limits_{C} \frac{f(z)\, e^{\frac{nz}{x}}}{z^{n+1}}\, dz, \quad (64)$$

где контур C ограничивает область, включающую 0, внутри которой $f(z)$ регулярна *. Применяя формулу Стирлинга, выводим отсюда асимптотическую формулу для $n \to \infty$:

$$A_n\left(f(x)\right) \sim \frac{1}{i} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int\limits_{C} \left[\frac{x}{z}\, e^{\frac{z}{x}-1}\right]^n \frac{f(z)\, dz}{z}. \quad (65)$$

Уравнением узловой линии при любом $h > 0$ будет

$$P_x(a,\, b,\, h) = \log\left|\left|\frac{x-h}{z-h}\right|^{1-\frac{z}{h}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{z}{h}}\right| =$$

$$= \left(1-\frac{a}{h}\right)\log\left|\frac{x-h}{z-h}\right| + \frac{a}{h}\log\left|\frac{x}{z}\right| + \frac{b}{h}\left(\arg\frac{z}{z-h} - \arg\frac{x}{x-h}\right),$$

и области сходимости многочленов $B_n\left(f(z);\, x,\, h\right)$ подобны областям сходимости $B_n\left(f(hz);\, x,\, 1\right)$. С уменьшением h области регулярности функции $f(hz)$ расширяются, и при $h \to 0$ предельные узловые линии имеют уравнения

$$\lim_{h=0} P_x(a,\, b,\, h) =$$

$$= \lim_{h=0}\left\{\log\left|\frac{x}{z}\right| + \frac{a}{h}\log\left|\frac{1-\frac{h}{z}}{1-\frac{h}{x}}\right| + \frac{b}{h}\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta h}{\alpha^2+\beta^2-\alpha h} - \operatorname{arctg}\frac{bh}{a^2+b^2-ah}\right]\right. =$$

$$= \log\left|\frac{x}{z}\right| + a\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{a}{a^2+b^2}\right) + b\left(\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\right) =$$

$$= \log\left|\frac{x}{z}\right| + \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} - 1 = 0.$$

Поэтому *все предельные петли* F_x, *соответствующие многочленам* $A_n\left(f(x)\right)$, *подобны петле* F_1^0 *точки* $x = \alpha + i\beta = 1$, *имеющей уравнение*

$$\frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right) + 1 - a = 0 \qquad (a \leqslant 1). \quad (66)$$

Благодаря следствию 1 мы знаем, что предельные петли F_x° *конвексны* и, в силу следствия 2, область, ограниченная петлей F_x°, всегда автономна. Различные виды автономных областей, соответствующих много-

* Формулу (64) легко также проверить непосредственным интегрированием (см. упомянутую выше статью из Journal de Math.).

членам $A_n(f(x))$, которые совпадают со всеми возможными областями сходимости этих многочленов, легко получаются непосредственно; но их можно также вывести как асимптотические формы бесконечно возрастающих автономных областей многочленов $B_n(f(x))$. Так, например, из леммы 5 вытекает:

Всякий квадрат с центром в 0, дополненный четырьмя конвексными попарно симметричными областями, окаймляющими его стороны, но не выходящими соответственно из кругов, имеющих эти стороны диаметрами, образует автономную область многочленов $A_n(f(x))$.

В частности, из следствия 6 следует, что *всякий эллипс, у которого отношение между осями не превышает $\sqrt{3}$, является автономной областью.*

Антипетли для многочленов $A_n(f(x))$, соответствующие любой точке c, также все подобны антипетле с узлом 1, представляющей наружную часть кривой, заданной уравнением

$$\frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2)+\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-1=0 \qquad (\alpha^2+\beta^2\geqslant 1), \tag{67}$$

и получаются из последней посредством умножения на c.

Согласно следствию 14, *все антипетли многочленов $A_n(f(x))$ являются автономными областями.* Вследствие этого, генеральная область сходимости многочленов $A_n(f(x))$, представляющая на основании теоремы C и следствия 11 область, лежащую внутри антипетель всех ближайших к 0 особых точек функции $f(z)$, практически получается немного проще, чем для многочленов $B_n(f(x))$. А именно, нужно сначала взять область, ограниченную антипетлями всех особых точек, лежащих на окружности сходимости * функции $f(z)$; если внутри полученной таким образом области D_0 функция $f(z)$ регулярна, то это и будет генеральная область D сходимости многочленов $A_n(f(x))$; если же внутри D_0 будут еще особые точки c, то следует учесть только антипетли этих точек, так как D_0 лежит внутри антипетель всех прочих особых точек.

Принимая во внимание, что петли F_x^0 при удалении x по лучу подобны и подобно расположены, так что F_x^0 лежит внутри $F_{\lambda x}^0$, при $\lambda>1$, получаем

Следствие 16. *Граница генеральной области сходимости многочленов $A_n(f(x))$ имеет всегда одну и только одну точку на каждом луче точки 0.*

Например, если единственными особыми точками $f(z)$ на окружности радиуса 1 являются точки ± 1, а расстояние от 0 до остальных особых точек не менее e, то границей генеральной области сходимости многочленов $A_n(f(x))$ будет линия

$$\cos\theta=\rho(1-\log\rho) \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

и ее симметричное относительно оси ординат отображение.

* В случае многочленов $B_n(f(x))$ вместо этого приходилось брать все ближайшие к отрезку 01 особые точки c, расстояния которых хотя бы до одного из концов отрезка 01 менее единицы.

Свойство генеральных областей сходимости многочленов $A_n(f(x))$, которые всегда автономны, заключающееся в следствии 16, вытекает также из соответствующего общего свойства областей сходимости многочленов $B_n(f(x))$, частным случаем которого является следствие 12. Но, так как в § 8 это свойство не было доказано в общем виде, то мы выведем его здесь.

Следствие 17. *Граница генеральной области сходимости многочленов $B_n(f(x))$ имеет одну и только одну точку на каждом луче отрезка* 01.

Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что если точки $x_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, $x_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ лежат на одном и том же луче отрезка 01, то их пëтли F_{x_0} и F_{x_1} не могут иметь общих точек, иначе говоря, две точки антипетли не могут находиться на одном и том же луче.

Рассмотрим сначала вертикальный луч: $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 > \beta_0 > 0$, причем $0 < \alpha < 1$. Принимая во внимание, что в данном случае все точки петель F_{x_0} и F_{x_1} находятся соответственно ниже их узлов x_0 и x_1, заключаем, что если они пересекаются в точке $c = a_0 + ib_0$, то $|b_0| < \beta_0 < \beta_1$. Беря производную по β первой части равенства (34-bis), находим

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial \beta} = \frac{a_0\beta - b_0\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(1-a_0)\beta - b_0(1-\alpha)}{(\alpha-1)^2 + \beta^2} =$$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\beta - b_0) + (1-2\alpha)(a_0\beta - b_0\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha-1)^2+\beta^2]}.$$

Не нарушая общности, можем считать, что $a_0 \geqslant \frac{1}{2}$. В таком случае при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ имеем $\frac{\partial \Phi_c}{\partial \beta} > 0$, поэтому $\Phi_c(\alpha, \beta) = 0$ имеет не более одного корня $\beta > b_0$. Если же $\alpha > \frac{1}{2}$, то производная числителя равна $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta(\beta - b_0) + a_0(1 - 2\alpha)$ и в случае $a_0 \leqslant 1$ при $\beta > b_0$, $\beta > 0$ она положительна, так что уравнение $\Phi_c(\alpha, \beta) = 0$ имеет не более двух корней; поэтому, принимая во внимание, что число точек антипетли на луче должно быть нечетным, заключаем, что оно равно 1. В случае же $a_0 > 1$ замечаем, что $\frac{\partial \Phi_c}{\partial \beta} < 0$ при $\beta = b_0 > 0$ и $\beta = 0$, вследствие чего $\frac{\partial \Phi_c}{\partial \beta} = 0$ имеет лишь один корень больший, чем b_0, а потому уравнение $\Phi_c(\alpha, \beta) = 0$ снова не может иметь более двух корней и, следовательно, имеет лишь один корень на этом луче; наконец, при $b_0 < 0$, пользуясь следствием 4, видим, что $\frac{\partial \Phi_c}{\partial \beta} > 0$, так как $\beta_0^2 + \alpha_0^2 - \alpha_0 > 0$ и $\alpha_0 < \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_0}{\beta_0}\right)^2}\right]$, откуда следует, что $\alpha_0 + \beta_0^2 + \alpha_0(1 - 2\alpha_0) \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь луч, проходящий через 0 и через точку $x_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, где $\alpha_0 < 0$, $\beta_0 > 0$; в любой точке $x = \alpha + i\beta$ этого луча имеем $x = \lambda x_0$, где $\lambda > 0$. Полагая, что x_0 находится на антипетле (34-bis), из

$$P_{\lambda x_0}(a_0, b_0) = \Phi_c(\lambda\alpha_0, \lambda\beta_0) = (1 - a_0)\log\left|\frac{\lambda x_0 - 1}{c - 1}\right| + a_0 \log\left|\frac{\lambda x_0}{c}\right| +$$

$$+ b_0\left[\arg\frac{c}{c-1} - \arg\frac{\lambda x_0}{\lambda x_0 - 1}\right],$$

получаем

$$\frac{d\Phi_c}{d\lambda}=\frac{a_0}{\lambda}+\frac{(1-a_0)\,[(\lambda\alpha_0-1)\,\alpha_0+\lambda\beta_0^2]-b_0\beta_0}{(\lambda\alpha_0-1)^2+\lambda^2\beta_0^2}=$$
$$=\frac{(\alpha_0^2+\beta_0^2)\,\lambda^2-[(1+a_0)\,\alpha_0+b_0\beta_0]\,\lambda+a_0}{\lambda\,[(\lambda\alpha_0-1)^2+\lambda^2\beta_0^2]}=$$
$$=\frac{(a_0-\alpha_0\lambda)\,(1-\alpha_0\lambda)+(\beta_0\lambda-b_0)\,\beta_0\lambda}{\lambda\,[(\lambda\alpha_0-1)^2+\lambda^2\beta_0^2]}$$

Таким образом, при бесконечно малом изменении $\lambda\geqslant 1$, во всех точках петли F_{x_0}, находящихся ниже прямой

$$(a-\alpha_0)\,(1-\alpha_0)=\beta_0\,(b-\beta_0), \tag{68}$$

будем иметь $\Phi_c\,(\lambda\alpha_0,\,\lambda\beta_0)>\Phi_c\,(\alpha_0,\beta_0)=0$; но прямая (68) проходит через узел x_0 петли F_{x_0} и пересекает ось абсцисс в точке

$$a=\alpha_0-\frac{\beta_0^2}{1-\alpha_0}<0$$

вне отрезка 01, проходя выше петли F_{x_0} вблизи x_0; поэтому вся петля F_{x_0} находится ниже прямой (68), и, следовательно, во всех ее точках $c=a_0+ib_0$ имеем

$$P_{\lambda x_0}(a_0,\,b_0)=\Phi_c\,(\lambda\alpha_0,\,\lambda\beta_0)>0\quad(\lambda>1),$$

а потому петля F^{x_0} находится внутри петли $F_{\lambda x_0}$. Аналогичным образом наше утверждение доказывается для лучей, проходящих через конец 1 отрезка 01.

Возвращаясь снова к многочленам $A_n\,(f(x))$, заметим, что они дают простой критерий для определения, является ли данная точка на окружности сходимости строки Тейлора особенной или нет.

Критерий регулярности функции

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n^nx^n+\ldots \tag{69}$$

в точке x_0 на ее окружности сходимости: *для того чтобы $f(x)$ была регулярна в точке x_0 окружности сходимости, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\delta>0$, что для всех ε, модуль которых равен δ, многочлены*

$$A_n\,(f(x))=\sum_0^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_kx^k, \tag{70}$$

где $x=x_0\,(1+\varepsilon)$, *остаются ограниченными для некоторой бесконечно возрастающей последовательности значений n* (в таком случае они будут ограничены для всех n).

В самом деле, если функция $f(x)$ регулярна во всех точках круга C достаточно малого радиуса 2δ с центром в точке x_0, то петля F_x^0 любой точки $x=x_0\,(1+\varepsilon)$ находится внутри области регулярности $f(x)$, включающей круг C и круг сходимости ряда (69); поэтому во всех этих точках (все) многочлены $A_n\,(f(x))$ равномерно сходятся к $f(x)$, т. е. ограничены. Наоборот, если некоторая бесконечная последовательность многочленов $A_n\,(f(x))$ ограничена для всех $x=x_0\,(1+\varepsilon)$ при $|\varepsilon|=\delta$, то по теореме Стильтьеса они сходятся к регулярной функции, являющейся аналитическим продолжением ряда (69).

Из указанного выше критерия вытекает сразу, например, известная

теорема, что если все коэффициенты строки Тейлора $a_n \geqslant 0$, то точка $x_0 > 0$ на окружности сходимости должна быть особенной.

Укажем еще аналог формул (44), (45) для области сходимости D многочленов $A_n(f(x))$, когда областью регулярности служит полуплоскость, включающая 0. Пусть границей области регулярности будет прямая $\alpha = c$. Тогда область сходимости D будет ограничена частью кривой, имеющей уравнение

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{c}{u}\{-1+(1-u)e^{2u}\}, \\ \beta^2 &= \frac{c^2e^{2u}}{u^2}\{1-(1-u)^2e^{2u}\}, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

соответствующей $u \geqslant 0$, которая касается прямой $\alpha = c$ в точках $(c, \pm c)$ и отрезком этой прямой, заключенным между точками касания. Формулы (71) могут быть получены переходом к пределу из формул (44), (45) при замене основного отрезка 01 отрезком $0h$, с любым $h < c$, в предположении, что $h \to 0$; имеем сначала

$$\alpha = \frac{c}{u}\left\{-1+\left(1+\frac{hu}{c}\right)^{\frac{2c}{h}-1}\left[1-\left(1-\frac{h}{c}\right)u\right]\right\}$$

$$\beta^2 = \frac{c^2}{u^2}\left(1+\frac{hu}{c}\right)^{\frac{2c}{h}}\left\{1-\left(1+\frac{hu}{c}\right)^{\frac{2c}{h}-2}\left[1-\left(1-\frac{h}{c}\right)u\right]^2\right\},$$

[мы заменили в (44), (45) α, β, c соответственно через $\frac{\alpha}{h}$, $\frac{\beta}{h}$, $\frac{c}{h}$, и параметр u обозначили через $\frac{hu}{c}$]; после этого, устремляя h к нулю, находим (71). Наибольшее значение u_0 параметра u в формулах (71) соответствует $\beta = 0$ и определяется из уравнения $e^{u_0}(1-u_0)+1=0$; при этом α получает наименьшее значение $\alpha = \frac{c}{1-u_0}$, удовлетворяющее уравнению $\alpha + ce^{1-\frac{c}{\alpha}} = 0$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
28. IX. 1942

S. BERNSTEIN. SUR LES DOMAINES DE CONVERGENCE DES POLYNOMES

$$\sum_0^n C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m}.$$

RÉSUMÉ

Le Mémoire a pour objet principal la résolution du problème de la détermination des domaines D_R de convergence des polynomes

$$B_n(f(x)) = B_n(f(z); x, 1) = \sum_0^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \tag{1}$$

correspondant à une fonction analytique $f(z)$ possédant une région donnée R de régularité. La formule générale

$$B_n(f(x)) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,[(x-1)^{1-z}x^z]^n}{z(nz-1)\dots(nz-n)}\,dz, \tag{2}$$

où C est un contour quelconque de la région de régularité de $f(z)$ entourant le segment 01, ainsi que la formule asymptotique

$$B_n(f(x)) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_C f(z) \left[\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z} \left(\frac{x}{z}\right)^z \right]^n \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \tag{3}$$

qui est valable, lorsque

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_C \left| \frac{f(z)}{z(1-z)} \left[\left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z} \left(\frac{x}{z}\right)^z \right]^n \right| dz \to 0,$$

servent de base à cette étude.

Les § 2—3 étudient les propriétés de la partie de la ligne

$$\left| \left(\frac{x-1}{z-1}\right)^{1-z} \left(\frac{x}{z}\right)^z \right| = 1 \tag{4}$$

formant un contour fermé, nommé boucle F_x du noeuds x.

Les § 4—5 sont consacrées á l'étude des régions S dites autonomes contenant le segment 01 *qui jouissent de la propriété que les boucles F_x de tous les points x du contour limitant la région S appartiennent à cette région S.*

Le § 6 contient la démonstration du

THÉORÈME A. *Si la fonction $f(z)$ est régulière dans une région contenant la boucle F_x et le segment* 01, *le point x se trouve á l'intérieur du domaine D de convergence du polynomes $B_n(f(z); x, 1) = B_n(f(x))$. Au contraire, le point x ne peut pas être un point de convergence des polynomes $B_n(f(x))$ si $f(z)$ possède un ou plusieurs pôles sur F_x ou à son intérieur.*

La question reste ouverte à savoir, si le point x ne pourrait exceptionnellement être un point de convergence pour certaines suites de polynomes $B_n(f(x))$, lorsque les singularités de $f(z)$ dans F_n seraient d'une nature spéciale plus compliquée. Ainsi, l'auteur limite son étude aux domaines de convergence générale D_R qui sont communs à toutes les fonctions $f(z)$ ayant R pour domaine de régularité. Par conséquent, (corollaire 8): *La frontière $D'_{R'}$ du domaine D_R de convergence générale des polynomes $B_n(f(x))$ est formée par les noeuds x dont les boucles F_x se trouvent dans la région R de régularité de $f(z)$ et contiennent un point au moins de la frontière R' de R.*

Il en résulte, en particulier (corollaire 10), que *la condition nécessaire et suffisante pour que $D_R = R$ est que la région de régularité R de $f(z)$ soit une région autonome.* De plus, si l'on a $|x| \geqslant 1$, $|x-1| \geqslant 1$ en tous les points de la frontière de D_R, la région D_R est autonome.

Les propositions des § 4—5 trouvent donc ici leur application. En particulier, signalons la lemme 5. *Soit $A_1A_2A_3A_4$ un rectangle quelconque inscrit dans l'hyperbole Γ ayant pour équation*

$$b^2 - a^2 + a = 0; \tag{26}$$

soient $C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{41}$ des demi-cercles extérieurs au rectangle $A_1A_2A_3A_4$ ayant respectivement pour diamètres ses côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Toute région S limitée par quatre courbes convexes symétriques deux à deux $A_1H_{12}A_2$, $A_2H_{23}A_3$, $A_3H_{34}A_4$, $A_4H_{41}A_1$ contenues dans les demi-cercles C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{41} est autonome.

Sans nous arrêter sur d'autres variétés de régions autonomes résultant des § 4—5, indiquons comme conséquences du lemme 5, que toute région convexe symétrique par rapport à l'axe $b=0$ et située à l'intérieur du cercle C, ayant le segment 01 pour diamètre, est autonome (corollaire 6), ainsi que toute région limitée par une ellipse, ayant pour équation

$$\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}=1, \tag{28}$$

pourvu que $p \geqslant \frac{1}{2}$ et que le demi-axe q satisfasse à l'une ou l'autre des conditions: 1) $p \geqslant q \geqslant p\sqrt{\frac{4p^2-1}{12p^2+1}}$ ou 2) $q \geqslant p \geqslant q\sqrt{\frac{4q^2+1}{12q^2-1}}$. Remarquons que l'ellipse de Tchebycheff, ayant 0 et 1 pour foyers $\left(p^2=q^2+\frac{1}{4}\right)$ satisfait à la première des conditions indiquées, ce qui conduit, en particulier, d'après le corollaire 10, à un résultat obtenu antérieurement par Kantorowitsch.

Le § 7 contient la démonstration et quelques applications du

THÉORÈME B. *Si* $c=a_0+ib_0$ *est le seul point singulier à distance finie* (extérieur au segment 01) *de la fonction* $f(z)$, *le domaine de convergence générale des polynomes* $B_n(f(x))$ *est limité par le contour externe* D'_c, *nommé—antiboucle du point* C, *de la ligne*

$$\left|\left(\frac{x-1}{c-1}\right)^{1-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{c}\right|=1, \tag{34}$$

possédant un point angulaire rentrant égal à $\frac{3\pi}{2}$ *en* c *qui est un point double de la ligne* (34). Le théorème B conduit immédiatement § 8 au

THÉORÈME C. *Si la région de régularité* R *de la fonction* $f(z)$ *contenant le segment* 01 *admet* R' *comme frontière, le domaine général de convergence* D_R *des polynomes* $B_n(f(x))$ *est formé par la partie commune à toutes les antiboucles des points de* R'.

Grâce au corollaire 12 la détermination de D_R ne fait intervenir que les antiboucles des points singuliers de $f(z)$ les plus proches de 01 sur chaque rayon issu du segment 01. On en déduit aussi que la frontière D'_R de D_R ne contient qu'un seul point (corollaire 12 et 17) sur chaque rayon.

Le § 9 est consacré à une étude détaillée du cas où la région R est limitée par une droite perpendiculaire à l'axe réel (extérieure au segment 01); soit $a=a_0$ l'équation de cette droite. Alors, le domaine de convergence générale est limité par la ligne

$$\alpha=\frac{1}{u}\cdot\{-1+(1+u)^{2a_0-1}[1-(a_0-1)u]\} \quad (0<u), \tag{44}$$

$$\beta^2=\frac{(1+u)^{2a_0}}{u^2}\{1-(1+u)^{2a_0-2}[1-(a_0-1)u]^2\} \tag{45}$$

et le segment de la droite $a=a_0$, où $\beta^2 \leqslant a_0^2-a_0$ Par exemple, pour $\alpha=\frac{3}{2}$, on a

$$\alpha=\frac{3}{2}-\frac{u^2}{2}, \quad \beta^2=\frac{3-u}{4}(1+u)^3; \tag{53}$$

et en éliminant u on obtient

$$(\alpha^2+\beta^2-3)^2=4(3-2\alpha) \qquad (\beta^2+\alpha^2\geqslant 3) \tag{54}$$

pour la partie curviligne de la frontiere D' qui contiènt de plus le segment $|\beta|\leqslant\frac{3}{2}$ de la droite $\alpha=\frac{3}{2}$ du domaine de convergence D.

L'étude du cas, où la fonction $f(z)$ admet des singularités sur le segment 01, faite au § 10, conduit au

THÉORÈME A-bis. *Si la fonction $f(z)$ est régulière sur la boucle F_x et à son intérieur et si elle reste finie sur le segment* 01, *on a*

$$\lim_{n=\infty} B_n(f(x))=f(x). \tag{59}$$

On tire de là le corollaire 15. Si la fonction $\varphi(x)$ est finie sur tout le segment 01; si dans chaque intervalle $0a_1$, a_1a_2, ..., a_k1 du segment 01 elle est égale, respectivement, aux fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_k(x)$ analytiques et régulières à l'intérieur de l'intervalle correspondant; si D_0, D_1, ..., D_k sont, respectivement, les domaines de convergence générale déterminés par les singularités des fonctions $f_0(z)$, ..., $f_k(z)$ extérieures au segment 01: dans ces conditions les polynomes $B_n(\varphi(x))$ convergent vers $f_0(x)$ dans toute la région intérieure au domaine D_0 et à la partie gauche de la lemniscate

$$|x-1|^{1-a_1}|x|^{a_1}=(1-a_1)^{1-a_1}a_1^{a_1}; \tag{61}$$

les polynomes $B_n(\varphi(x))$ convergent vers $f_1(x)$ dans toute la région intérieure à D_1, à la partie droite de la lemniscate (61) et à la partie gauche de la lemniscate

$$|x-1|^{1-a_2}|x|^{a_2}=(1-a_2)^{1-a_2}a_2^{a_2},$$

et ainsi de suite.

Le Mémoire se termine par le § 11, où on envisage les polynomes

$$B_n(f(z);x,h)=B_n\left(f(hz);\frac{x}{h},1\right)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{hm}{n}\right)C_n^m\left(\frac{x}{h}\right)^m\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-m}, \tag{62}$$

et tout particulièrement le cas limite, où $h\to 0$.

Dans ce dernier cas

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{h=0} B_n(f(z);x,h)=A_n(f(x))=\\&=\lim\left[f(0)+n\Delta f(0)\frac{x}{h}+\frac{n(n-1)}{2}\Delta_2 f(0)\left(\frac{x}{h}\right)^2+\dots\right]=\\&=f(0)+f'(0)x+\dots+\left(1-\frac{1}{h}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{f^k(0)}{k!}x^k+\dots\\&\qquad\dots+f^n(0)\left(\frac{x}{n}\right)^n.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Les résultats contenus dans ce paragraphe complètent sur quelques points l'étude des polynomes $A_n(f(x))$ faite antérieurement par l'auteur dans le § 5 du travail «Sur la convergence de certaines suites de polynomes», Journal de Mathématique, XV (1936), 345—358).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 7 (1943), 89—110 Série mathématique

Б. В. ГНЕДЕНКО

О РОСТЕ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

(Представлено академиком **А. Н. Колмогоровым***)*

В статье устанавливается, что любой однородный случайный процесс с независимыми приращениями и конечной дисперсией удовлетворяет закону повторного логарифма (сформулированному в несколько ослабленной форме). Для случая бесконечной дисперсии устанавливается, что порядок роста всегда больше, чем предусматриваемый законом повторного логарифма.

Установленный А. Я. Хинчиным в 1924 г. ([2]) закон повторного логарифма для схемы Бернулли послужил источником многих дальнейших работ. Содержание этого закона состоит в следующем. Пусть производится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A сохраняет постоянное значение p $(0 < p < 1)$. Если через μ обозначить число появлений события A в первых n испытаниях, то с вероятностью 1 выполняется равенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\mu - np|}{\sqrt{2npq \lg \lg n}} = 1.$$

Более точно это предложение может быть сформулировано так: пусть δ — любое положительное число, тогда с вероятностью большей $1-\delta$

1) для всех достаточно больших значений n

$$\frac{|\mu - np|}{\sqrt{2npq \lg \lg n}} < 1 + \delta,$$

2) найдутся сколь угодно большие значения n, для которых

$$\frac{|\mu - np|}{\sqrt{2npq \lg \lg n}} > 1 - \delta.$$

Очевидно, что этой теоремой А. Я. Хинчина была найдена точная верхняя граница для роста величины $\mu - np$.

В 1926 г. А. Я. Хинчину удалось распространить закон повторного логарифма на схему Пуассона. Существенное продвижение в этом направлении как в отношении результатов, так и примененного метода доказательства было произведено работой А. Н. Колмогорова в 1929 г. Оказалось, что если значения независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$

по абсолютной величине ограничены общей для них всех константой и дисперсия B_n суммы

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - E\xi_k)$$

стремится при $n \to \infty$ к бесконечности, то $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|s_n|}{\sqrt{2B_n \lg\lg B_n}} = 1.$

В 1932 г. А. Я. Хинчиным (3) было доказано, что для однородных стохастических процессов с независимыми приращениями*, распределенных по закону Гаусса, с вероятностью 1

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{2B \lg\lg \lambda}} = 1,$$

где обозначено $B = D\xi(1)$. В этой же монографии при тех же предположениях о процессе $\xi(\lambda)$ был установлен локальный закон повторного логарифма, согласно которому с вероятностью 1

$$\limsup_{\lambda\to 0} \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{2B\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}}} = 1.$$

Мы не будем касаться в этом кратком обзоре исследований P. Lévy, Marzinkiewicz'a и других авторов, распространивших указанные результаты на другие объекты: зависимые случайные величины, независимые функции, стационарные случайные процессы и пр. Нам важно отметить результаты А. Я. Хинчина (4), полученные им в 1938 г., относительно локального роста однородных случайных процессов с независимыми приращениями. Оказалось, что для всех процессов этого рода, не содержащих гауссовой компоненты **, с вероятностью 1

$$\limsup_{\lambda\to 0} \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}}} = 0.$$

Отсюда следует, что процессы, управляемые законом Гаусса, обладают наибольшим локальным ростом. Одновременно с этим были найдены все те процессы, которые подчиняются локальному закону повторного логарифма: это процессы, которые содержат гауссову компоненту, и только они.

Задача настоящей статьи состоит в изучении роста однородных случайных процессов с независимыми приращениями при $\lambda \to \infty$. Ограничимся пока указанием следующих обнаруженных здесь фактов. Для всех рассматриваемых процессов с вероятностью 1

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg\lg \lambda}} \neq 0.$$

Это, очевидно, означает, что все однородные процессы с независимыми приращениями имеют по меньшей мере такой же порядок роста, как и

---

* Определение этих процессов будет дано позднее.

** Это означает, что в формуле (3) $G(+0) - G(-0) = 0$.

$\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}$. Далее оказалось, что процессы с бесконечной дисперсией и только они растут быстрее, чем $\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}$.

Отсюда вытекает, что все процессы с конечной дисперсией и только они удовлетворяют с вероятностью 1 соотношению

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}} = a, \tag{1}$$

где a — некоторое постоянное, заключенное между 0 и $+\infty$ и различное в разных процессах.

Этой теоремой устанавливается связь между условиями применимости закона повторного логарифма и условиями сходимости при $\lambda \to \infty$ функций распределения величин $\xi(\lambda)$ к закону Гаусса. Именно закон повторного логарифма в форме (1) для процесса $\xi(\lambda)$ выполняется тогда и только тогда, когда можно подобрать такие вещественные постоянные $a > 0$ и b, что функции распределения величин

$$\frac{\xi(\lambda) - b\lambda}{a\sqrt{\lambda}}$$

при $\lambda \to \infty$ сходятся к закону Гаусса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Аналогичный результат был обнаружен мной раньше ([1]) для локального роста случайных процессов.

Распространение найденных здесь теорем на суммы независимых случайных величин как одинаково, так и различно распределенных, мы предполагаем дать в одной из ближайших работ.

Теперь мы перейдем к изложению понятий и фактов, которые нам потребуются в работе.

Однородным случайным процессом с независимыми приращениями называется совокупность случайных величин $\xi(\lambda)$, зависящих от одного вещественного параметра λ и удовлетворяющих двум следующим условиям: 1) при любом λ функция распределения случайной величины $\xi(\lambda + \lambda_0) - \xi(\lambda_0)$ не зависит от λ_0, 2) приращения случайной величины $\xi(\lambda)$ в неперекрывающихся промежутках изменения параметра λ независимы между собой.

Для того чтобы дать полную вероятностную характеристику такого процесса, очевидно, достаточно задать для любого λ функцию распределения $\Phi_\lambda(x)$ величины $\xi(\lambda + \lambda_0) - \xi(\lambda_0)$ или же ее характеристическую функцию

$$\varphi_\lambda(t) = \{\varphi_1(t)\}^\lambda;$$

поэтому каждый однородный процесс с независимыми приращениями исчерпывающе определяется посредством задания характеристической функции $\varphi_1(\lambda)$. Следуя А. Я. Хинчину, мы будем называть функцию $\varphi_1(\lambda)$ *характеристической функцией процесса* $\xi(\lambda)$.

В 1932 г. А. Н. Колмогоровым было доказано, что функция $\varphi_1(t)$ тогда и только тогда является характеристической функцией однородного случайного процесса с независимыми приращениями, имеющего конечную дисперсию, когда ее логарифм может быть представлен в виде

$$\psi(t) = \lg\varphi_1(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{itu} - 1 - itu\} \frac{1}{u^2} d\Gamma(u), \tag{2}$$

где γ — вещественная постоянная, а $\Gamma(u)$ — неубывающая функция с ограниченной вариацией на интервале $(-\infty, +\infty)$. Функция $\Gamma(u)$ определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной, поэтому мы можем ее выбрать так, что $\Gamma(0) = 0$.

Позднее P. Levy [см., например ([5]), § 4] нашел аналогичную формулу для любых интересующих нас процессов, без предположения о конечности дисперсии. Оказалось, что функция $\varphi_1(t)$ тогда и только тогда является характеристической функцией некоторого однородного процесса с независимыми приращениями, когда ее логарифм может быть представлен в виде

$$\psi(t) = \lg\varphi_1(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right\} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u), \tag{3}$$

где γ — вещественная постоянная, а $G(u)$ — неубывающая функция с ограниченной вариацией. В дальнейшем мы будем выбирать $G(u)$ так, что $G(0) = 0$.

В формулах (2) и (3) мы будем считать $\gamma = 0$; это, очевидно, соответствует тому, что мы вместо величин $\xi(\lambda+\lambda_0) - \xi(\lambda_0) = \xi(\lambda) - \xi(0)$ станем рассматривать величины $\xi(\lambda+\lambda_0) - \xi(\lambda_0) - \gamma\lambda$. Не ограничивая общности результатов, мы можем считать в дальнейшем $\xi(0) = 0$.

Из сравнения формул (2) и (3) легко обнаружить, что процесс $\xi(\lambda)$ имеет бесконечную дисперсию тогда и только тогда, когда расходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)\, dG(u).$$

Следуя А. Я. Хинчину, мы скажем, что неубывающая положительная функция $u(\lambda)$ является **верхней границей процесса** $\xi(\lambda)$, если с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{u(\lambda)} = 0.$$

Пусть c — положительное постоянное; введем для дальнейшего обозначение

$$P_c(\lambda) = P\{|\xi(\lambda)| > cu(\lambda)\}.$$

ТЕОРЕМА 1*. *Функция $u(\lambda)$ является верхней границей для однородного процесса с независимыми приращениями тогда и только тогда, когда при всех $c > 0$*

$$\int_{\sigma}^{\infty} P_c(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{4}$$

где σ — любое положительное число.

Предварительно установим некоторые простые неравенства. Пусть

$$\xi(\lambda) = \xi(\alpha) + \{\xi(\lambda) - \xi(\alpha)\},$$

то из неравенства

$$|\xi(\lambda)| > a$$

следует, что должно быть выполнено по меньшей мере одно из неравенств

$$|\xi(\alpha)| > \frac{a}{2}$$

или

$$|\xi(\lambda) - \xi(\alpha)| > \frac{a}{2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$P\{|\xi(\lambda)| > a\} \leqslant P\left\{|\xi(\alpha)| > \frac{a}{2}\right\} + P\left\{|\xi(\lambda) - \xi(\alpha)| > \frac{a}{2}\right\} =$$
$$= P\left\{|\xi(\alpha)| > \frac{a}{2}\right\} + P\left\{|\xi(\lambda - \alpha)| > \frac{a}{2}\right\}. \tag{5}$$

При $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ это неравенство дает

$$P\{|\xi(\lambda)| > a\} \leqslant 2P\left\{\left|\xi\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right| > \frac{a}{2}\right\}.$$

Повторное применение этого неравенства приводит к соотношению

$$P\{|\xi(\lambda)| > a\} \leqslant 4P\left\{\left|\xi\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right| > \frac{a}{4}\right\}. \tag{6}$$

Доказательство достаточности. Предположим, что условие (4) выполнено при любом $c > 0$, и покажем, что в этом случае функция $u(\lambda)$ является верхней границей процесса $\xi(\lambda)$. Для этого обнаружим прежде всего, что при любом $c > 0$ и при $\lambda \to \infty$

$$P\left\{|\xi(\lambda)| > cu\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \to 0. \tag{7}$$

Из неравенства (5) следует, что

$$P_c(\lambda) \leqslant P\left\{|\xi(\alpha)| > \frac{c}{2} u(\lambda)\right\} + P\left\{|\xi(\lambda - \alpha)| > \frac{c}{2} u(\lambda)\right\},$$

а так как $u(\lambda) \geqslant u(\alpha)$ и $u(\lambda) \geqslant u(\lambda - \alpha)$, то

$$P_c(\lambda) \leqslant P\left\{|\xi(\alpha)| > \frac{c}{2} u(\alpha)\right\} + P\left\{|\xi(\lambda - \alpha)| > \frac{c}{2} u(\lambda - \alpha)\right\} =$$
$$= P_{\frac{c}{2}}(\alpha) + P_{\frac{c}{2}}(\lambda - \alpha).$$

* Эта теорема, так же как ее доказательство, представляет собой полную аналогию основной леммы А. Я. Хинчина [см. ([4]), § 2].

Делим обе части этого неравенства на α и интегрируем в пределах от $\frac{\lambda}{4}$ до $\frac{\lambda}{2}$.

$$\lg 2 \cdot P_c(\lambda) \leqslant \int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{2}} P_{\frac{c}{2}}(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} + \int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{2}} P_{\frac{c}{2}}(\lambda-\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{2}} P_{\frac{c}{2}}(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha} + \int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{3}{4}\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\alpha)\frac{d\alpha}{\lambda-\alpha}.$$

Так как в интервале $\frac{\lambda}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{4}\lambda$

$$\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} \leqslant 3,$$

то

$$\lg 2 \cdot P_c(\lambda) \leqslant 3\int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3}{4}\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Согласно условию теоремы отсюда следует, что при $\lambda \to \infty$

$$P_c(\lambda) \to 0.$$

Отсюда и из соотношения (6), полагая в нем $a = cu\left(\frac{\lambda}{4}\right)$, получаем (7).

Возьмем произвольную последовательность чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \ldots < \lambda_n = \lambda$; пусть a — любое положительное число; обозначим через e_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ событие, состоящее в том, что для $1 \leqslant i < k$

$$\xi(\lambda_i) \leqslant au\left(\frac{\lambda}{4}\right),$$

$$\xi(\lambda_k) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right).$$

Так как процесс $\xi(\lambda)$ — с независимыми приращениями, то очевидна следующая цепочка неравенств

$$P_{e_k}\left\{\xi(\lambda) > \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \geqslant P_{e_k}\left\{\xi(\lambda)-\xi(\lambda_k) > -\frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} =$$

$$= P\left\{\xi(\lambda)-\xi(\lambda_k) > -\frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \geqslant P\left\{|\xi(\lambda)-\xi(\lambda_k)| < \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} =$$

$$= P\left\{|\xi(\lambda-\lambda_k)| < \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \geqslant P\left\{|\xi(\lambda-\lambda_k)| < \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{4}\right)\right\}.$$

В силу (7) при $\lambda \to \infty$ последняя вероятность стремится к единице, откуда следует, что для достаточно больших λ

$$P_{e_k}\left\{\xi(\lambda) > \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} > \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{8}$$

Положим

$$X_n(\lambda) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi(\lambda_k);$$

тогда для того, чтобы имело место неравенство

$$X_n(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right),$$

необходимо и достаточно наступление какого-либо из событий e_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$; так как эти события несовместимы, то

$$P\left\{X_n(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} = \sum_{k=1}^{n} P(e_k).$$

Для достаточно больших λ, в силу (8),

$$P\left\{X_n(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} P(e_k)\, P_{e_k}\left\{\xi(\lambda) > \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2P\left\{\xi(\lambda) > \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\}. \tag{9}$$

Обозначим

$$X(\lambda) = \max_{0<\alpha\leqslant\lambda} \xi(\alpha);$$

под вероятностью соотношения

$$X(\lambda) > u$$

мы, следуя А. Я. Хинчину, будем понимать верхнюю грань вероятности

$$P\{X_n(\lambda) > u\}$$

при всевозможных выборах точек $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = \lambda$ и при всевозможных значениях n. Неравенство (9) имеет место при любых $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ $\ldots < \lambda_n = \lambda$ и всех n, лишь бы λ было достаточно велико, поэтому для всех достаточно больших λ

$$P\left\{X(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \leqslant 2P\left\{\xi(\lambda) > \frac{a}{2}u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\}. \tag{10}$$

Введем теперь следующее обозначение

$$w_m = P\left\{\max_{2^m\leqslant\lambda\leqslant 2^{m+1}} \frac{\xi(\lambda)}{u(\lambda)} > \varepsilon\right\},$$

где ε — любое положительное число. В силу монотонности функции $u(\lambda)$

$$w_m \leqslant P\left\{\max_{2^m\leqslant\lambda\leqslant 2^{m+1}} \xi(\mu) > \varepsilon u(2^m)\right\} \leqslant P\left\{\max_{2^m\leqslant\lambda\leqslant 2^{m+1}} \xi(\lambda) > \varepsilon u\left(\frac{2^z}{4}\right)\right\},$$

где z — любое число, удовлетворяющее неравенствам $m+1 < z \leqslant m+2$. Так как очевидно, что $X(2^z) \geqslant \max\limits_{2^m\leqslant\lambda\leqslant 2^{m+1}} \xi(\lambda)$; то

$$w_m = \left\{X(2^z) > \varepsilon u\left(\frac{2^z}{4}\right)\right\}.$$

Отсюда, на основании (10); при достаточно большом m

$$w_m \leqslant 2P\left\{\xi(2^z) > \frac{\delta}{2}u\left(\frac{2^z}{4}\right)\right\} \leqslant 2P\left\{|\xi(2^z)| > \frac{\delta}{2}u\left(\frac{2^z}{4}\right)\right\}.$$

Применение неравенства (6) дает нам теперь

$$w_m \leq 8P\left\{\left|\xi\left(\frac{2^z}{4}\right)\right| > \frac{\delta}{8}u\left(\frac{2^z}{4}\right)\right\} = 8P_{\frac{\varepsilon}{8}}\left(\frac{2^z}{4}\right).$$

Интегрируем последнее неравенство по z в пределах от $m+1$ до $m+2$

$$w_m \leq 8\int_{m+1}^{m+2} P_{\frac{\varepsilon}{8}}\left(\frac{2^z}{4}\right)dz = \frac{8}{\lg 2}\int_{2^{m-1}}^{2^m} P_{\frac{\varepsilon}{8}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Мы видим отсюда, что в силу условия теоремы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ сходится. Из определения w_m следует, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, для всех достаточно больших λ

$$\xi(\lambda) < \varepsilon u(\lambda).$$

Аналогичными рассуждениями можно установить тот же результат для неравенства

$$\xi(\lambda) > -\varepsilon u(\lambda).$$

Так как ε произвольно, то отсюда следует, что с вероятностью 1 при $\lambda \to \infty$

$$\frac{|\xi(\lambda)|}{u(\lambda)} \to 0.$$

Доказательство необходимости. Пусть теперь известно, что функция $u(\lambda)$ является верхней границей для процесса $\xi(\lambda)$. Положим

$$M(\lambda) = \max_{0 < \alpha < \lambda}\frac{|\xi(\lambda)|}{cu(\lambda)},$$

где c — любое наперед заданное положительное число. Легко видеть, что из соотношений

$$\left.\begin{aligned} M(2^{m-1}) \leq 1, \\ \max_{2^{m-1} \leq \lambda \leq 2^m}\frac{|\xi(\lambda) - \xi(2^{m-1})|}{2cu(2^m)} > 1\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

вытекают неравенства

$$\left.\begin{aligned} M(2^{m-1}) \leq 1, \\ M(2^m) > 1.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Действительно, из неравенств (11) следует, что при некотором $\lambda\,(2^{m-1} \leq \leq \lambda \leq 2^m)$

$$|\xi(\lambda)| \geq 2cu(2^{m-1}).$$

Но очевидно, что

$$|\xi(\lambda)| \geq |\xi(\lambda) - \xi(2^{m-1})| - |\xi(2^{m-1})| > \\ > 2cu(2^m) - cu(2^{m-1}) < cu(2^m) \geq cu(\lambda),$$

откуда

$$M(2^m) > 1.$$

Обозначим через V_m вероятность второго из неравенств (11). Так как в силу однородности процесса величины $\xi(\lambda)-\xi(2^{m-1})$ и $\xi(\lambda-2^{m-1})$ имеют одинаковое распределение вероятностей, то

$$V_m = P\{\max_{\lambda\leqslant 2^{m-1}} |\xi(\lambda)| > 2cu(2^m)\}.$$

Ясно, что для любого $\lambda \leqslant 2^{m-1}$ имеет место неравенство

$$V_m \geqslant P\{|\xi(\lambda)| > 2cu(2^m)\}$$

и, значит, на основании неравенства (6)

$$V_m \geqslant \frac{1}{4} P\{|\xi(4\lambda)| > 8cu(2^m)\}.$$

Выберем число λ в интервале $2^{m-2} \leqslant \lambda \leqslant 2^{m-1}$. Так как при этом

$$4\lambda \geqslant 2^m,$$

то

$$V_m \geqslant \frac{1}{4} P\{|\xi(4\lambda)| > 8cu(4\lambda)\} = \frac{1}{4} P_{8c}(4\lambda).$$

Разделим это неравенство на λ и проинтегрируем в пределах от 2^{m-2} до 2^{m-1},

$$V_m \lg 2 \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{2^{m-2}}^{2^{m-1}} P_{8c}(4\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{4}\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} P_{8c}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Предположим теперь, что вопреки утверждению теоремы при некотором $c_0 > 0$

$$\int\limits_0^\infty P_{c_0}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = \infty. \tag{13}$$

Это означает, как показывает последнее из наших неравенств, что при $c \leqslant \frac{c_0}{8}$ расходится ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} V_m$.

Положим

$$U_m = P\{M(2^m) > 1\} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Вероятность соотношений (11), очевидно, равна $V_m(1-U_{m-1})$, а вероятность соотношений (12) равна $U_m - U_{m-1}$. Так как (12) следует из (11), то должно быть

$$V_m(1-U_{m-1}) \leqslant U_m - U_{m-1},$$

откуда

$$1-U_m \leqslant (1-U_{m-1})(1-V_m) \leqslant$$
$$\leqslant (1-U_0)\prod_{k=1}^{m}(1-V_m).$$

Мы только что доказали расходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} V_m$, поэтому из последнего неравенства мы заключаем, что при $m \to \infty$

$$U_m \to 1.$$

Это означает, что для всех достаточно больших λ с вероятностью, сколь-угодно близкой к 1,

$$\max_{\lambda \leqslant 2^m} \frac{|\xi(\lambda)|}{cu(\lambda)} > 1.$$

Мы видим, таким образом, что равенство (13) противоречит предположению, что функция $u(\lambda)$ является верхней границей процесса $\xi(\lambda)$.

Мы перейдем теперь к доказательству нескольких вспомогательных предложений.

Пусть $\xi_1(\lambda)$ и $\xi_2(\lambda)$ — независимые случайные величины, имеющие то же распределение вероятностей, что и $\xi(\lambda)$. Положим

$$P_c^*(\lambda) = P\{|\xi_1(\lambda) - \xi_2(\lambda)| > cu(\lambda)\},$$

тогда имеет место

ЛЕММА 1. *При всех* $c > 0$

$$2\int_c^{\infty} P_{\frac{c}{2}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} > \int_c^{\infty} P_c^*(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Доказательство. Величина $\xi_1 - \xi_2$ имеет симметричную функцию распределения, поэтому

$$P\{|\xi_1 - \xi_2| > a\} = 2P\{\xi_1 - \xi_2 > a\}.$$

Так как из неравенства $\xi_1 - \xi_2 > a$ следует, что должно быть выполнено по меньшей мере одно из неравенств $\xi_1 > \frac{a}{2}$, $\xi_2 < -\frac{a}{2}$, то

$$P\{|\xi_1 - \xi_2| > a\} \leqslant 2\left(P\left\{\xi_1 > \frac{a}{2}\right\} + P\left\{\xi_2 < -\frac{a}{2}\right\}\right) = 2P\left\{|\xi| < \frac{a}{2}\right\}.$$

Положив $a = cu(\lambda)$, мы находим отсюда, что

$$P_c^*(\lambda) \leqslant 2P_{\frac{c}{2}}(\lambda).$$

Это неравенство доказывает лемму.

Мы видим отсюда, что если функция $u(\lambda)$ не является верхней границей для процесса $\{\xi_1(\lambda) - \xi_2(\lambda)\}$, то она не может быть верхней границей также для процесса $\xi(\lambda)$. Это обстоятельство позволит нам при доказательстве теорем 2 и 4 ограничиться рассмотрением только симметричных функций распределения.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\xi(\lambda) = \xi_1(\lambda) + \xi_2(\lambda)$, *где* $\xi_1(\lambda)$ *и* $\xi_2(\lambda)$ — *взаимно независимые случайные величины с симметричными функциями распределения. Функция* $u(\lambda)$ *тогда и только тогда является верхней границей для процесса* $\xi(\lambda)$, *когда она является верхней границей для процессов* $\xi_1(\lambda)$ *и* $\xi_2(\lambda)$.

Доказательство. Так как неравенства $\xi_1 > a$, $\xi_2 \geqslant 0$, $\xi_1 < -a$, $\xi_2 \leqslant 0$ влекут за собой неравенство $|\xi_1 + \xi_2| > a$, то

$$P\{|\xi_1 + \xi_2| > a\} \geqslant P\{\xi_1 > a\}P\{\xi_2 \geqslant 0\} + P\{\xi_1 < -a\}P\{\xi_2 \leqslant 0\}.$$

Для симметрично распределенных случайных величин

$$P\{\xi_2 \geqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2}, \quad P\{\xi_2 \leqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2},$$

поэтому

$$P\{|\xi_1+\xi_2|>a\}\geqslant\frac{1}{2}P\{|\xi_1|>a\}. \tag{14}$$

Точно так же находим, что

$$P\{|\xi_1+\xi_2|>a\}\geqslant\frac{1}{2}P\{|\xi_2|>a\}. \tag{15}$$

С другой стороны, из того, что неравенство $\xi_1+\xi_2>a$ влечет за собой выполнение по меньшей мере одного из неравенств $\xi_1>\frac{a}{2}$, $\xi_2>\frac{a}{2}$, мы заключаем, что имеет место соотношение

$$P\{|\xi_1+\xi_2|>a\}=2P\{\xi_1+\xi_2>a\}\leqslant 2\left(P\left\{\xi_1>\frac{a}{2}\right\}+P\left\{\xi_2>\frac{a}{2}\right)\right\}=$$
$$=P\left\{|\xi_1|>\frac{a}{2}\right\}+P\left\{|\xi_2|>\frac{a}{2}\right\}. \tag{16}$$

Из неравенств (14), (15), (16), положив в них $a=cu(\lambda)$, мы получаем

$$\frac{1}{4}\left(P\{|\xi_1(\lambda)|>cu(\lambda)\}+P\{|\xi_2(\lambda)|>cu(\lambda)\}\right)\leqslant P\{|\xi_1+\xi_2|>cu(\lambda)\}=$$
$$=P\{|\xi(\lambda)|>cu(\lambda)\}\leqslant P\left\{|\xi_1(\lambda)|>\frac{c}{2}u(\lambda)\right\}+P\left\{|\xi_2(\lambda)|>\frac{c}{2}u(\lambda)\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{4}\int_c^\infty P'_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}+\int_c^\infty P''_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\Big\}\leqslant\int_c^\infty P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\leqslant$$
$$\leqslant\int_c^\infty P'_{\frac{c}{2}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}+\int_c^\infty P''_{\frac{c}{2}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

где обозначено

$$P'_c(\lambda)=P\{|\xi_1(\lambda)|<cu(\lambda)\},\quad P''_c(\lambda)=P\{|\xi_2(\lambda)|>cu(\lambda)\}.$$

В силу теоремы 1, это неравенство завершает доказательство леммы.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_1(\lambda)$, логарифм характеристической функции которого определяется формулой

$$\lg\varphi'_1(t)=\psi_1(t)=\int_0^b(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),$$

где b — положительное постоянное. Пусть функция распределения величины $\xi_1(\lambda)$ обозначена через $\Phi_{\lambda_1}(x)$. Для любого постоянного a имеет место равенство

$$Ee^{\xi_1(\lambda)}=\varphi'_\lambda(ai)=\{\varphi'_1(ai)\}^\lambda=e^{\lambda\int_0^b(\operatorname{ch}ut-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)} \tag{17}$$

Положим $\mu=\sqrt{\lg\lg\lambda}$ и выберем величину a в интервале $0<a<\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$. Тогда для всех достаточно больших λ в интервале $0<u<b$

имеет место неравенство $au < 1$, и мы можем написать следующее соотношение:

$$\operatorname{ch} au - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(au)^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{(au)^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots\right) \leqslant (au)^2.$$

Пусть $g = \int_0^b (1+u^2)\, dG(u)$, тогда из (17) находим, что

$$Ee^{a\xi_1} \leqslant e^{\lambda a^2 g}.$$

Заметим, что, так как при любом α

$$\operatorname{ch} \alpha - 1 \geqslant \frac{\alpha^2}{2},$$

то

$$Ee^{a\xi_1} \geqslant e^{\frac{1}{2} a^2 \lambda g}. \tag{18}$$

ЛЕММА 3.

$$1 - \Phi_{\lambda_1}(x) < \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4\lambda g}}, & \text{если } 0 < x \leqslant 2\mu\sqrt{\lambda}\, g, \\ e^{-\frac{\mu x}{2\sqrt{\lambda}}}, & \text{если } x > 2\mu\sqrt{\lambda}\, g \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, согласно неравенству Чебышева

$$1 - \Phi_{\lambda_1}(x) \leqslant \frac{Ee^{a\xi_1(\lambda)}}{e^{ax}} < e^{\lambda a^2 g - ax}.$$

Положим $a = \frac{x}{2\lambda g}$ при $0 < x \leqslant 2\mu g\sqrt{\lambda}$; из предыдущего неравенства мы получаем первое неравенство леммы. Положив $a = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, из предыдущего неравенства для $x > 2\mu g\sqrt{\lambda}$ находим, что

$$1 - \Phi_{\lambda_1}(x) < e^{\mu\sqrt{\lambda}\, ga - ax} < e^{\frac{1}{2}ax - ax} = e^{-\frac{\mu x}{2\sqrt{\lambda}}}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $u(\lambda) = \sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}$ не является верхней границей ни для одного однородного случайного процесса с независимыми приращениями.*

Доказательство. Согласно лемме 1 нам достаточно установить теорему для процессов с симметричными функциями распределения. Пусть логарифм характеристической функции процесса $\xi(\lambda)$ дан формулой

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} (\cos tu - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u).$$

Представим $\xi(\lambda)$ в виде суммы независимых случайных величин $\xi_1(\lambda)$ и $\xi_2(\lambda)$. Пусть число b таково, что $\int_0^b (1+u^2)\, dG(u) > 0$; если

$g=\int_0^b (1+u^2)\,dG(u)<2$, то полагаем логарифм характеристической функции величины $\xi_1(\lambda)$ равным

$$\psi_1(t)=\int_0^b (\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),$$

а если $\int_0^b (1+u^2)\,dG(u)>2$, то полагаем

$$\psi_1(t)=\int_0^b (\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,d\,\frac{1}{k}\,G(u),$$

где число k выбирается так, чтобы $g=\int_0^b (1+u^2)\,d\,\frac{G(u)}{k}<2$.

Логарифм характеристической функции величины $\xi_2(\lambda)$ определяем из равенства $\psi(t)=\psi_1(t)+\xi_2(t)$.

Выбираем для дальнейшего $a=\frac{\mu}{4\sqrt{\lambda}}$.

Из леммы 3 следует, что при $x\to\infty$

$$e^{ax}\{1-\Phi_{\lambda_1}(x)\}\to 0.$$

Мы можем поэтому написать следующее равенство:

$$\mathscr{E}=Ee^{a\xi_1(\lambda)}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\,d\Phi_{\lambda_1}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\,d(\Phi_{\lambda_1}(x)-1)=a\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\,(1-\Phi_{\lambda_1}(k))\,dx.$$

Представляем $\mathscr{E}$ в виде суммы

$$\mathscr{E}=a\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\frac{1}{2}a\lambda g}+\int_{\frac{1}{2}a\lambda g}^{8a\lambda g}+\int_{8a\lambda g}^{\infty} e^{ax}\,(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx\right).$$

Очевидно, что

$$J_1=a\int_{\infty}^{0} e^{ax}(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx\leqslant a\int_{\infty}^{0} e^{ax}\,dx=1.$$

В силу леммы 3

$$J_4=a\int_{8a\lambda g}^{\infty} e^{ax}\,(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx=a\int_{2\mu g\sqrt{\lambda}}^{\infty} e^{ax}\,(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx<$$

$$<a\int_{2\mu\sqrt{\lambda}g}^{\infty} e^{ax}e^{-\frac{\mu x}{2\sqrt{\lambda}}}\,dx=a\int_{8a\lambda g}^{\infty} e^{-ax}\,dx<1.$$

Лемма 3 позволяет нам получить следующую оценку

$$J_2=a\int_{0}^{\frac{1}{2}a\lambda g} e^{ax}\,(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx\leqslant a\int_{0}^{\frac{1}{2}a\lambda g} e^{ax-\frac{x^2}{4\lambda g}}\,dx$$

Функция $ax - \frac{x^2}{4\lambda g}$ возрастает в интервале $0 < x < \frac{1}{2}a\lambda g$, поэтому

$$J_2 < ae^{\frac{1}{2}a^2\lambda g - \frac{a^2\lambda^2 g^2}{16\lambda g}} \frac{1}{2}a\lambda g = \frac{1}{32}\mu^2 g e^{\frac{1}{32}\mu^2 g - \frac{1}{(16)^2}\mu^2 g}.$$

Так как $\mu^2 g \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, то при достаточно больших λ мы имеем

$$\frac{1}{32}\mu^2 g e^{-\frac{1}{(16)^2}\mu^2 g} < \frac{1}{3}$$

и, следовательно, в силу (18)

$$J_2 < \frac{1}{3} e^{\frac{1}{32}\mu^2 g} = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}a^2\lambda g} < \frac{1}{3} Ee^{a\xi_1(\lambda)}.$$

Для достаточно больших λ

$$2 < \frac{1}{6} Ee^{a\xi_1(\lambda)},$$

поэтому

$$J_1 + J_2 + J_4 < \frac{1}{2} Ee^{a\xi_1(\lambda)}.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших λ

$$J_3 = a \int_{\frac{1}{2}a\lambda g}^{8a\lambda g} e^{ax}(1 - \Phi_{\lambda_1}(x))\, dx > \frac{1}{2} Ee^{a\xi_1(\lambda)} > \frac{1}{2} e^{\frac{1}{32}\mu^2 g}.$$

Так как

$$J_3 < ae^{8a^2\lambda g}\left(1 - \Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right)\right) 8a\lambda g = \frac{1}{2}\mu^2 g e^{\frac{1}{2}\mu^2 g}\left(1 - \Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right)\right),$$

то последние два неравенства позволяют нам обнаружить, что

$$1 - \Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right) > \frac{1}{\mu^2 g} e^{-\frac{1}{2}\mu^2 g + \frac{1}{32}\mu^2 g}.$$

Мы видим отсюда, что для всех достаточно больших λ

$$1 - \Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right) > e^{-\frac{1}{2}\mu^2 g} > e^{-\mu^2} = \frac{1}{\lg \lambda}.$$

Итак, мы нашли, что

$$P'_{\frac{g}{8}}(\lambda) = 2P\left\{\xi_1(\lambda) > \frac{g}{8}\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}\right\} > \frac{2}{\lg \lambda}.$$

Это неравенство показывает, что интеграл

$$\int_0^\infty P'_{\frac{g}{8}}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

расходится и тем самым завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 4. *Пусть $\xi(\lambda)$ — однородный процесс с конечной дисперсией, $\xi_1(\lambda)$ и $\xi_2(\lambda)$ независимы между собой и имеют то же распределение вероятностей, что и $\xi(\lambda)$, и*

$$P_c^*(\lambda) = P\{|\xi_1(\lambda) - \xi_2(\lambda)| > cu(\lambda)\}.$$

Тогда из того, что при всех $c > 0$

$$\int_c^{\infty} P_c^*(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} < +\infty \tag{19}$$

вытекает, что при всех $c > 0$

$$\int_c^{\infty} P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} < +\infty.$$

Доказательство. Так как неравенства $|\xi_1| > 2a$, $|\xi_2| \leqslant a$ влекут за собой неравенство $|\xi_1 - \xi_2| > a$, то ясно, что

$$P\{|\xi_1 - \xi_2| > a\} \geqslant P\{|\xi_1| > 2a\} \cdot P\{|\xi_2| \leqslant a\}.$$

Положив $a = cu(\lambda)$, мы находим отсюда, что

$$P_{2c}(\lambda) = P\{|\xi_1(\lambda)| > 2cu(\lambda)\} \leqslant \frac{P\{|\xi_1(\lambda) - \xi_2(\lambda)| > cu(\lambda)\}}{P\{|\xi_2(\lambda)| < cu(\lambda)\}} = \frac{P_c^*(\lambda)}{P\{|\xi_2(\lambda)| < cu(\lambda)\}}$$

Легко вычислить, что дисперсия величины $\xi(\lambda)$ равна

$$D\xi(\lambda) = -\lambda\left[\frac{d^2}{dt^2}\ (t)\right]_{t=0},$$

где $\psi(t)$ — логарифм характеристической функции величины $\xi(1)$.

Из (2) находим, что

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}\psi(t)\right]_{t=0} = -\int_0^{\infty} dG(u),$$

следовательно,

$$D\xi(\lambda) = \lambda G(+\infty).$$

В силу неравенства Чебышева

$$P\{|\xi_2(\lambda)| \leqslant cu(\lambda)\} \geqslant 1 - \frac{D\xi(\lambda)}{c^2u^2(\lambda)} = 1 - \frac{\lambda G(+\infty)}{c^2u^2(\lambda)}.$$

Из того, что интеграл (19) сходится при всех $c > 0$, как мы знаем, вытекает, что функция $u(\lambda)$ является верхней границей для процесса $\xi_1(\lambda) - \xi_2(\lambda)$. В силу предыдущей теоремы функция $u(\lambda)$ должна иметь вид $\sqrt{\lambda \lg\lg\lambda}\,\omega(\lambda)$, где $\omega(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Это обстоятельство позволяет нам заключить, что при всех достаточно больших λ

$$P\{|\xi_2(\lambda)| \leqslant cu(\lambda)\} \geqslant \frac{1}{2}$$

и что, следовательно,

$$P_{2c}(\lambda) \leqslant 2P_c^*(\lambda).$$

Очевидно, что это неравенство доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 3. *Если дисперсия однородного случайного процесса с независимыми приращениями конечна, то каждая функция* $u(\lambda) = \omega(\lambda)\sqrt{\lambda\lg\lg\lambda}$, *где* $\omega(\lambda) \to \infty$ *при* $\lambda \to \infty$, *служит для него верхней границей.*

Доказательство. В силу предыдущей леммы, мы можем ограничиться доказательством теоремы для симметрично распределенных величин $\xi(\lambda)$. Пусть логарифм характеристической функции процесса $\xi(\lambda)$ дается формулой

$$\psi(t)=\int_0^\infty (\cos tu-1)\frac{1}{u^2}\,d\Gamma(u).$$

Положим

$$\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t),$$

где

$$\psi_1(t)=\int_0^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\cos tu-1)\frac{1}{u^2}\,d\Gamma(u),$$

$$\psi_2(t)=\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^\infty (\cos tu-1)\frac{1}{u^2}\,d\Gamma(u).$$

Функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определяют независимые случайные величины $\xi_1(\lambda)$ и $\xi_2(\lambda)$ с симметричными функциями распределения.

Положим для дальнейшего $a=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, $\mu=c\sqrt{\lg\lg\lambda}$, $\Gamma=\Gamma\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)$.

Так как $au<1$ в интервале $0<u<\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}$, то

$$\lambda\psi_1(ai)\leqslant\lambda a^2\Gamma$$

и, следовательно,

$$Ee^{a\xi_1(\lambda)}\leqslant e^{\lambda a^2\Gamma}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$P_c'(\lambda)=P\{|\xi_1|>c\omega(\lambda)\sqrt{\lambda\lg\lg\lambda}\}<\frac{e^{\lambda a^2\Gamma}}{e^{c\omega\lambda\sqrt{\lg\lg\lambda}}}=e^{\mu^2\Gamma-\mu^2\omega(\lambda)}.$$

Так как $\omega(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\infty$, то для всех λ, бóльших некоторого λ,

$$\mu^2\Gamma-\mu^2\omega(\lambda)<-\frac{2\mu^2}{c^2}$$

и, значит,

$$P_c'(\lambda)\leqslant e^{-\frac{2\mu^2}{c^2}}=e^{-2\lg\lg\lambda}=\frac{1}{\lg^2\lambda}.$$

Мы имеем таким образом

$$\int_{\lambda_0}^\infty P_c'(\lambda)\leqslant\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{\lambda_0}^\lambda\frac{d\lambda}{\lambda\lg^2\lambda}=\frac{1}{\lg\lambda_0}.$$

Следующее неравенство очевидно:

$$P_c''(\lambda)=P\{|\xi_2(\lambda)|>\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)\}=2\left(1-\Phi_{\lambda_2}(\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda))\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}\int_0^{\mu\sqrt{\lambda}\omega(\lambda)}(1-\Phi_{\lambda_2}(x))\,dx.$$

Согласно формуле обращения для характеристических функций

$$\Phi_{\lambda_2}(x)-\Phi_{\lambda_2}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin xt}{t}e^{\lambda\psi_2(t)}\,dt.$$

Так как $\Phi_{\lambda_2}(0)=\frac{1}{2}$, то

$$P_c''(\lambda)\leqslant\frac{2}{2\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}\int_0^{\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}\left(1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin xt}{t}e^{\lambda\psi_2(t)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{\lambda\psi_2(t)}}{t}\int_0^{\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}\sin xt\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)\,t}{t^2}\left(1-e^{\lambda\psi_2(t)}\right)dt.$$

Но

$$1-e^{\lambda\psi_2(t)}\leqslant-\lambda\psi_2(t)=\lambda\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\infty}(1-\cos tu)\frac{1}{u^2}\,d\Gamma(u),$$

поэтому

$$P_c''(\lambda)\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\mu\omega(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)\,t}{t^2}\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\infty}(1-\cos tu)\frac{1}{u^2}\,d\Gamma(u)=$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\mu\omega(\lambda)}\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\infty}\frac{d\Gamma(u)}{u^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)\,t)(1-\cos tu)}{t^2}\,dt.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos at)(1-\cos bt)}{t^2}\,dt=\pi\min(|a|,|b|),$$

поэтому

$$P_c''(\lambda)\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu\omega(\lambda)}\left(\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}u\frac{d\Gamma(u)}{u^2}+\int_{\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)}^{\infty}\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)\frac{d\Gamma(u)}{u^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu\omega(\lambda)}\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\infty}\frac{1}{u}\,d\Gamma(u)+\lambda\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty}\frac{d\Gamma(u)}{u^2}.$$

Итак

$$\int_c^{\infty}P_c''(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\leqslant\int_c^{\infty}\frac{d\lambda}{\mu\omega(\lambda)\sqrt{\lambda}}\int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\infty}\frac{d\Gamma(u)}{u}+\int_c^{\infty}d\lambda\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty}\frac{d\Gamma(u)}{u^2}.$$

Для $c>e$

$$\int_c^{\infty}d\lambda\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty}\frac{d\Gamma(u)}{u^2}=\int_{\sqrt{c}}^{\infty}\frac{d\Gamma(u)}{u^2}\int_c^{u^2}d\lambda=\int_{\sqrt{c}}^{\infty}\frac{u^2-e}{u^2}\,d\Gamma(u)\leqslant\int_{\sqrt{c}}^{\infty}d\Gamma(u)\leqslant\Gamma(+\infty).$$

В интеграле

$$I = \int_{c}^{\infty} \frac{d\lambda}{\mu\omega(\lambda)\sqrt{\lambda}} \int_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}^{\infty} \frac{d\Gamma(u)}{u}$$

сделаем замену $\alpha = \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}$. Так как $d\mu > 0$, то

$$d\alpha = \frac{d\lambda}{2\mu\sqrt{\lambda}} - \frac{\sqrt{\lambda}\,d\mu}{\mu^2} \leqslant \frac{d\lambda}{2\mu\sqrt{\lambda}}$$

и, следовательно,

$$I \leqslant \int_{\frac{\sqrt{\sigma}}{c\sqrt{\lg\lg\sigma}}}^{\infty} \frac{2\,d\lambda}{\omega(\lambda)} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{d\Gamma(u)}{u}.$$

Выберем $\sigma > e^e$ и обозначим $c_1 = \frac{\sqrt{\sigma}}{c\sqrt{\lg\lg\sigma}}$. Для достаточно больших λ $\omega(\lambda) > 1$, поэтому

$$I \leqslant 2\int_{c_1}^{\infty} d\lambda \int_{c}^{\infty} \frac{d\Gamma(u)}{u} = 2\int_{c_1}^{\infty}\left(\int_{c_1}^{u} d\alpha\right)\frac{d\Gamma(u)}{u} = 2\int_{c_1}^{\infty} \frac{u - c_1}{u}\, d\Gamma(u) \leqslant 2\Gamma(+\infty).$$

Согласно лемме 2, теорема доказана.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_1(\lambda)$, логарифм характеристической функции которого дан формулой

$$\psi_1(t) = \int_{0}^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\cos tu - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u), \tag{20}$$

где $\mu = \sqrt{\lg\lg\lambda}$; положим

$$g = \int_{0}^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (1+u^2)\, dG(u).$$

Если $\Phi_{\lambda_1}(x)$ означает функцию распределения величины $\xi_1(\lambda)$, то имеет место

ЛЕММА 5.

$$1 - \Phi_{\lambda_1}(x) < \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4\lambda g}} & \text{для} \quad 0 < x \leqslant 2\mu g\sqrt{\lambda}, \\ e^{-\frac{\mu x}{2\sqrt{\lambda}\mu}} & \text{для} \quad x > 2\mu\sqrt{\lambda}g. \end{cases}$$

Доказательство. Легко убедиться, что если $0 < a \leqslant \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, то

$$e^{\frac{1}{2}a^2\lambda g} < Ee^{a\xi_1(\lambda)} < e^{a^2\lambda g}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$1 - \Phi_{\lambda_1}(x) \leqslant \frac{Ee^{a\xi_1(\lambda)}}{e^{ax}} < e^{a^2\lambda g - ax}.$$

Положив здесь $a=\frac{x}{4\lambda g}$ для $0<x<2\mu g\sqrt{\lambda}$, мы получаем первое соотношение леммы. Выбрав $a=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda g}}$ для $x>2\mu\sqrt{\lambda g}$, мы находим, что

$$1-\Phi_{\lambda_1}(x)\leqslant e^{a^2\lambda g-ax}=e^{ax\left(\frac{u\lambda g}{x}-1\right)}=$$
$$=e^{ax\left(\frac{\mu\sqrt{\lambda g}}{x}-1\right)}<e^{ax\left(\frac{1}{2}-1\right)}=e^{-\frac{\mu x}{2\sqrt{\lambda g}}}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если дисперсия однородного случайного процесса $\xi(\lambda)$ с независимыми приращениями бесконечна, то можно найти такую функцию $\omega(\lambda)$ ($\omega(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\infty$), что функция $\omega(\lambda)\sqrt{\lambda\lg\lg\lambda}$ не является верхней границей процесса $\xi(\lambda)$.*

Доказательство. Как мы уже говорили, для доказательства теоремы достаточно ограничиться рассмотрением процессов с симметричными функциями распределения; мы можем поэтому считать, что логарифм характеристической функции процесса $\xi(\lambda)$ дается формулой

$$\psi(t)=\int_0^\infty(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{x^2}dG(u).$$

Так как, по предположению, дисперсия процесса бесконечна, то при $X\to\infty$

$$\int_0^X(1+u^2)\,dG(u)\to\infty.$$

Представим $\xi(\lambda)$ в виде суммы двух независимых случайных величин $\xi_1(\lambda)$ и $\xi_2(\lambda)$; логарифм характеристической функции процесса $\xi_1(\lambda)$ определим формулой (20). Положим

$$g=\int_0^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}}(1+u^2)\,dG(u)=\omega^2(\lambda).$$

Докажем, что для определенной таким образом функции $\omega(\lambda)$ удовлетворяется теорема.

Положим для дальнейшего $a=\frac{\mu}{4\sqrt{\lambda g}}$, тогда, как это следует из леммы 5, при $x\to\infty$

$$e^{ax}(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\to0.$$

Отсюда вытекает, что

$$Ee^{a\xi_1(\lambda)}=\int_{-\infty}^\infty e^{ax}\,d\Phi_{\lambda_1}(x)=a\int_{-\infty}^\infty e^{ax}(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx.$$

Положим

$$I_1=a\int_{-\infty}^0,\quad I_2=a\int_0^{\frac{1}{2}a\lambda g},\quad I_3=a\int_{\frac{1}{2}a\lambda g}^{8a\lambda g},\quad I_4=a\int_{8a\lambda g}^\infty e^{ax}(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx.$$

Прежде всего видим, что

$$I_1 \leqslant a \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\,dx = 1;$$

затем, пользуясь леммой 5, находим, что

$$I_4 = \int_{2\mu\sqrt{\lambda g}}^{\infty} e^{ax}(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx < a \int_{2\mu\sqrt{\lambda g}}^{\infty} e^{ax}\cdot e^{-2ax}\,dx < a\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\,dx = 1.$$

Используя первое неравенство леммы 5, получаем

$$I_2 < a \int_{0}^{\frac{1}{2}a\lambda g} e^{ax-\frac{x^2}{4\lambda g}}\,dx < ae^{\frac{1}{2}a^2\lambda g-\frac{a^2\lambda g}{16}}\cdot\frac{1}{2}a\lambda g =$$

$$= \frac{1}{32}\mu^2 e^{-\frac{1}{256}\mu^2} e^{\frac{1}{2}a^2\lambda g} < \frac{1}{32}\mu^2 e^{-\frac{1}{256}\mu^2} Ee^{a\xi_1(\lambda)}.$$

Так как $\mu\to\infty$ при $\lambda\to\infty$, то при достаточно больших λ

$$\frac{1}{32}\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{256}} < \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad 2 < \frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}a^2\lambda g} < \frac{1}{6}Ee^{a\xi_1(\lambda)}$$

и, следовательно,

$$I_1+I_2+I_4 < 2+\frac{1}{3}Ee^{a\xi_1(\lambda)} < \frac{1}{2}Ee^{a\xi_1(\lambda)}.$$

Из того, что

$$I_1+I_2+I_3+I_4 = Ee^{a\xi_1(\lambda)} > e^{\frac{1}{2}a^2\lambda g},$$

мы выводим неравенства

$$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{32}\mu^2} < \frac{1}{2}Ee^{a\xi_1(\mu)} < I_3 = a\int_{\frac{1}{2}a\lambda g}^{8a\lambda g} e^{ax}(1-\Phi_{\lambda_1}(x))\,dx <$$

$$< e^{8a^2\lambda g}\left(1-\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right)\right)8a^2\lambda g =$$

$$= \frac{1}{2}\mu^2 e^{\frac{1}{2}\mu^2}\left(1-\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right)\right)$$

Отсюда

$$1-\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right) > \frac{1}{\mu^2}e^{\frac{1}{32}\mu^2-\frac{1}{2}\mu^2}$$

и, следовательно, при достаточно больших λ

$$1-\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right) > e^{-\frac{1}{2}\mu^2} = \frac{1}{\sqrt{\lg\lambda}}.$$

Так как

$$P'_{\frac{1}{8}}(\lambda) = P\left\{|\xi_1(\lambda)| > \frac{1}{8}\sqrt{\lambda\lg\lg\lambda}\,\omega(\lambda)\right\} = 2\left\{1-\Phi_{\lambda_1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right)\right\} > \frac{2}{\sqrt{\lg\lambda}},$$

то мы находим, что

$$\int_{c}^{\infty} P'_{\frac{1}{8}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = +\infty.$$

Согласно лемме 2 теорема доказана.

Из теорем 2, 3, 4 в качестве простого следствия мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Однородный случайный процесс с независимыми приращениями тогда и только тогда подчиняется закону повторного логарифма, когда он имеет конечную дисперсию.*

При этом, как мы говорили во введении к работе, закон повторного логарифма понимается в том смысле, что с вероятностью 1

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}}$$

равен некоторому положительному числу.

Институт математики
Московского государственного
университета

Поступило
21. V. 1942

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. Локально-устойчивые законы распределения, Известия Академии Наук СССР, сер. матем., **6** (1942).
2. А. Я. Хинчин. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fundam. Math., **6** (1924), 9—20.
3. А. Я. Хинчин. Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
4. А. Я. Хинчин. О локальном росте однородных стохастических процессов без последействия, Известия Академии Наук СССР, сер. матем., № 5—6 (1939), 487—508.
5. А. Я. Хинчин. Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ, 1938.

B. GNEDENKO. SUR LA CROISSANCE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES HOMOGÈNES À ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS

RÉSUMÉ

Un processus stochastique est une famille $\xi(\lambda)$ de variables aléatoires, le paramètre λ étant susceptible de toute valeure réelle. Le processus est dit homogène lorsque la loi de distribution de $\xi(\lambda+\lambda_0)-\xi(\lambda)$ ne dépend que de λ, et à accroissements indépendants lorsque les intervalles (a, b) et (c, d) étant sans point commun, $\xi(b)-\xi(a)$ et $\xi(d)-$ $-\xi(c)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Nous ne considérons dans cet article que des processus stochastiques possédant ces deux propriétés.

Notre but est l'étude de l'allure possible de $\xi(\lambda)-\xi(0)$ pour les valeurs très grandes de λ; nous écrirons $\xi(\lambda)$ au lieu de $\xi(\lambda)-\xi(0)$, en posant $\xi(0)=0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Soit $u(\lambda)$ une fonction positive non-décroissante définie pour $\sigma < \lambda < +\infty$

et telle que $\lim\limits_{\lambda \to \infty} u(\lambda) = \infty$. Nous disons que $u(\lambda)$ est une **frontière supérieure** de $\xi(\lambda)$, lorsque la relation

$$\frac{\xi(\lambda)}{u(\lambda)} \to 0 \; (\lambda \to \infty)$$

a la probabilité 1.

Désignons par $P_c(\lambda)$ la probabilité de l'inégalité $|\xi(\lambda)| > cu(\lambda)$. On a alors le

THÉORÈME 1. *Pour que $u(\lambda)$ soit une frontière supérieure de $\xi(\lambda)$, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\int_{c}^{\infty} P_c(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

soit finie pour tout $c > 0$.

THÉORÈME 2. *La fonction $\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}$ ne peut servir de frontière supérieure pour aucun processus $\xi(\lambda)$.*

THÉORÈME 3. *Soit $\xi(\lambda)$ une fonction ayant les propriétés mentionnées et telle que*

$$\frac{\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}}{u(\lambda)} \to 0 \;\; (\lambda \to \infty).$$

Alors $u(\lambda)$ est une frontière supérieure pour tout processus $\xi(\lambda)$ à valeur quadratique moyenne finie.

THÉORÈME 4. *Soit $\xi(\lambda)$ un processus stochastique à valeur quadratique moyenne infinie; alors il existe une fonction $\omega(\lambda)$ $(\lim\limits_{\lambda \to \infty} \omega(\lambda) = +\infty)$ telle que $\omega(\lambda)\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}$ n'est pas une frontière supérieure pour $\xi(\lambda)$.*

THÉORÈME 5. *Pour que le processus $\xi(\lambda)$ obéit à la loi du logarithme itéré, il faut et il suffit qu'il a une valeur quadratique moyenne finie.*

On entend par la loi du logarithme itéré le fait que les inégalités

$$0 < \limsup_{\lambda \to \infty} \frac{|\xi(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg \lg \lambda}} < +\infty$$

ont la probabilité 1.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 111–122 Série mathématique

А. Я. ХИНЧИН

КОНВЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Применение элементарных свойств конвексных функций может уточнить содержание целого ряда эволюционных теорем статистической механики, в то же время значительно упрощая их доказательства.

Известно, что, по аналогии с классической H-теоремой Больцмана в кинетической теории газов, статистическая механика строит свои эволюционные теоремы более общей природы, которые, однако, существенным образом отличаются от своего классического образца: в то время как теорема Больцмана имеет дело с плотностью распределения *молекул* в их фазовых пространствах, ее аналоги в статистической механике оперируют с плотностью распределения того множества *систем*, которое по основной схеме этой дисциплины призвано отображать собою эволюционный процесс отдельной изучаемой системы; здесь речь идет, следовательно, о распределениях в фазовом пространстве некоторой механической системы, содержащей, как правило, весьма большое число молекул (или частиц другой природы). Обозначая через $f(P)$ так или иначе определенную плотность этого распределения в точке P только что упомянутого фазового пространства Γ, мы можем заметить, что во всех теоремах рассматриваемого нами типа речь идет о поведении с течением времени величины

$$\int f(P) \lg f(P)\, dv, \tag{1}$$

где dv — элемент объема пространства Γ, а интеграция распространяется либо на все это пространство, либо на ограниченную надлежащим образом его часть (например, «поверхность» постоянной энергии); в квантовой физике пространство Γ (или выбранная его часть) часто бывает дискретным (иногда даже конечным), и интеграция в выражении (1) заменяется суммированием, что, разумеется, ни в чем не меняет существа дела. Различные эволюционные теоремы ставят своей задачей исследование изменения величины (1) либо под влиянием каких-либо определенных внешних воздействий, либо в том случае, когда система изолирована, предоставлена самой себе и эволюциони-

рует по своим внутренним законам. Во всех случаях стремятся показать, что значение величины (1) во всякий последующий момент времени не превосходит значения, принимаемого ею в начальный момент. Полагают, что такое поведение функционала (1) свидетельствует о тенденции распределения, характеризуемого функцией $f(P)$, становиться более равномерным с течением времени или под влиянием определенных внешних воздействий. Такая аргументация основывается, в сущности, на том единственном факте, что в случае, когда область интеграции в выражении (1) имеет конечный объем, величина (1), как легко показать, получает наименьшее значение при равномерном распределении [т. е. когда функция $f(P)$ есть постоянная величина; мы будем предполагать ее нормированной в смысле теории вероятностей, т. е. так, что $\int f(P)\,dv=1$]. Однако, не говоря уже о том, что при такой постановке вопроса мы не имеем никаких критериев для сравнительной оценки двух произвольно взятых распределений в смысле их «равномерности», функционал (1), конечно, является далеко не единственным, обладающим упомянутым выше свойством. С другой стороны, при употреблении этого специального критерия равномерности распределений доказательства эволюционных теорем, естественно, в большинстве случаев опираются на специальные свойства функции $x\lg x$ и в результате этого становятся аналитически громоздкими. Впрочем, Нейман заметил уже ([1]), что в нескольких рассмотренных им случаях доказательства сохраняют силу почти без изменений, если функцию $x\lg x$ заменить любой другой *конвексной* функцией; однако он не сделал отсюда выводов, способных упростить эти доказательства.

Между тем, привлекая в качестве орудия простейшие хорошо известные свойства конвексных функций, можно одновременно сделать содержание большинства эволюционных теорем весьма общим, не зависящим от свойств каких-либо специально выбираемых функций, и упростить доказательства этих теорем в такой мере, что они не нуждаются ни в каких расчетах, становясь во многих случаях почти тривиальными. В настоящей статье мы, после краткого очерка общей теории, покажем на ряде примеров, как это может быть сделано.

1. Конвексные функции

Функция $\varphi(x)$ называется *конвексной* в интервале $a<x<b$, если для любых x_1 и x_2 $(a<x_1<b,\ a<x_2<b)$

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\right];\qquad(2)$$

при этом a — вещественное число или $-\infty$, b — вещественное число или $+\infty$. Мы перечислим здесь некоторые хорошо известные элементарные свойства конвексных функций, которые нам понадобятся в даль-

нейшем; доказательства этих свойств можно найти, например, в книге Hardy, Littlewood and Pólya, Inequalities, Cambridge, University Press, 1934, где имеется специальная глава, посвященная конвексным функциям.

1° Если $\varphi(x)$ — непрерывная конвексная функция *, $q_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, то для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi(a_i). \tag{3}$$

Очевидно, что определяющее неравенство (2) является частным случаем $\left(n=2,\ q_1=q_2=\frac{1}{2}\right)$ неравенства (3).

2° Условимся называть ряд вещественных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *осреднением* ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если существует такая таблица из n^2 неотрицательных вещественных чисел λ_{ik} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} = 1 \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} a_k \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Тогда в силу неравенства (3)

$$\varphi(b_i) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \varphi(a_k) \quad (1 \leqslant i \leqslant n);$$

суммируя же это неравенство по i от 1 до n, находим

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i). \tag{4}$$

3° Неравенства (3) и (4) имеют свои аналоги для функций непрерывно меняющегося аргумента. Пусть P — точка любого многомерного евклидова пространства, D — область этого пространства и dv — элемент его объема. Пусть $a(P)$ — непрерывная в области D функция, все значения которой в этой области принадлежат интервалу, где функция $\varphi(x)$ конвексна и непрерывна. Пусть, далее, $\psi(P)$ — плотность некоторого закона распределения в области D, т. е.

---

* Примеры разрывных конвексных функций до сих пор удалось построить лишь применением так называемой аксиомы Цермело («принцип выбора»).

$$\psi(P) \geqslant 0 \quad (P \in D), \quad \int\limits_D \psi(P)\,dv = 1.$$

Тогда

$$\varphi\left[\int\limits_D a(P)\psi(P)\,dv\right] \leqslant \int\limits_D \varphi[a(P)]\psi(P)\,dv. \tag{3'}$$

Пусть теперь $a(P)$ и $b(P)$ — две функции, непрерывные в области D, значения которых в этой области принадлежат интервалу, где функция $\varphi(x)$ конвексна и непрерывна; условимся называть функцию $b(P)$ *осреднением* функции $a(P)$, если существует функция $\chi(P, Q)$, непрерывная при $P \in D$, $Q \in D$ и такая, что (в понятных обозначениях)

$$\int\limits_D \chi(P, Q)\,dv_P = \int\limits_D \chi(P, Q)\,dv_Q = 1 \quad (P \in D, \ Q \in D), \tag{5}$$

и

$$b(P) = \int\limits_D \chi(P, Q)\,a(Q)\,dv_Q \tag{6}$$

для всех $P \in D$. Тогда в силу (3′)

$$\varphi[b(P)] \leqslant \int\limits_D \chi(P, Q)\,\varphi[a(Q)]\,dv_Q \quad (P \in D).$$

Интегрируя же это неравенство по P, находим

$$\int\limits_D \varphi[b(P)]\,dv \leqslant \int\limits_D \varphi[a(P)]\,dv. \tag{4'}$$

2. О сравнительной равномерности распределений

В дальнейшем под $\varphi(x)$ везде будем подразумевать функцию, конвексную и непрерывную в интервале $(0, +\infty)$. Допустим, только ради сокращения записи, что объем области D, о которой только что шла речь, равен единице; тогда функция

$$\chi(P, Q) \equiv 1 \quad (P \in D, \ Q \in D)$$

удовлетворяет требованиям (5); если $a(P)$ есть плотность любого закона распределения в области D, то формула (6) дает

$$b(P) = \int\limits_D a(Q)\,dv = 1.$$

Таким образом, равномерное распределение $b(P) \equiv 1$ служит осред-

нением любого другого распределения; поэтому в силу соотношения (4′) функционал

$$H_\varphi(f) = \int_D \varphi[f(P)]\,dv, \tag{7}$$

где $f(P)$ — плотность любого закона распределения в области D, получает наименьшее значение для равномерного распределения; в частности, это справедливо для функционала

$$\int_D f(P) \lg f(P)\,dv.$$

Совершенно аналогично и в дискретной схеме; полагая

$$a_i \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,$$

мы в силу неравенства (4) легко находим, что сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) \tag{8}$$

получает наименьшее значение при $a_i = n^{-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, т. е. при равномерном распределении*.

Мы могли бы поэтому условиться для двух любых распределений считать более равномерным то, для которого функционал (7) [или (8)] имеет меньшее значение, если бы установление такой шкалы было независимо от совершенно произвольного в такой постановке задачи выбора конвексной функции $\varphi(x)$. На самом деле, однако, оно самым существенным образом зависит от этого выбора; именно, можно показать с помощью несложной конструкции, что если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две различные между собою функции, конвексные и непрерывные в интервале $(0, +\infty)$, всегда можно найти два таких распределения $f_1(P)$ и $f_2(P)$, что

$$H_{\varphi_1}(f_1) < H_{\varphi_1}(f_2), \quad H_{\varphi_2}(f_1) > H_{\varphi_2}(f_2),$$

т. е., что распределение $f_1(P)$ более равномерно или менее равномерно, чем распределение $f_2(P)$, смотря по тому, построим ли мы функционал (7) с помощью функции φ_1 или φ_2.

Поэтому мы, естественно, предпочитаем остановиться на следующем определении: *распределение* $f_1(P)$ *не менее равномерно, чем распределение* $f_2(P)$, *если*

$$H_\varphi(f_1) \leqslant H_\varphi(f_2),$$

---

* Легко показать, что ни одна неконвексная функция не обладает требуемым минимальным свойством.

какова бы ни была функция $\varphi(x)$, конвексная и непрерывная в интервале $(0, +\infty)$. Правда, тем самым мы отказываемся, конечно, от линейного упорядочения множества всевозможных распределений по их равномерности; однако, не говоря уже о том, что подобное упорядочение вообще вряд ли может быть проведено сколько-нибудь разумным образом, мы получаем этим весьма существенную выгоду в смысле внутренней состоятельности нашего определения, независимости его от каких бы то ни было произвольных элементов.

Для эволюционных теорем статистической механики основною целью является доказательство того, что некоторое распределение, характеризуемое функцией $f(P)$ (или рядом a_i), при определенных условиях становится более равномерным с течением времени. В смысле нашего определения для этого требуется установить, что функционал $H_\varphi(f)$, какова бы ни была конвексная непрерывная функция $\varphi(x)$, по истечении некоторого промежутка времени или в результате определенных физических воздействий на изучаемую систему, принимает значение, не превосходящее его начального значения. Во всех эволюционных теоремах, которые нам удалось рассмотреть, это не только оказывается верным, но и устанавливается почти тривиальным образом. Именно, во всех этих случаях результирующее распределение оказывается осреднением первоначального, вследствие чего неравенства (4) и (4′) дают все необходимое для доказательства соответствующей теоремы. Можно было бы прямо определять распределение f_1 как не менее равномерное, чем f_2, если первое является осреднением второго (это определение, в точности равносильное данному нами выше, было бы, очевидно, даже более простым и наглядным). Однако в некоторых случаях, и особенно в термодинамике, функционалы типа $H_\varphi(f)$ играют настолько существенную роль, что предпочтительнее остановиться на той форме определения, которую мы дали выше.

3. Теорема Гиббса

В классической механике метод Гиббса основан на рассмотрении большой совокупности физических систем, распределенной в фазовом пространстве Γ; проще всего с самого начала в порядке идеализации считать это распределение континуальным с плотностью $f(P)$; можно, впрочем, обойтись и совсем без традиционной совокупности, пользуясь вместо этого просто некоторым вероятностным распределением в пространстве Γ. Как бы то ни было, в силу известной теоремы Лиувилля, функционал $H_\varphi(f)$ при совершенно произвольной (хотя бы и неконвексной) функции $\varphi(x)$ является инвариантом естественного движения фазового пространства (в предположении, разумеется, что область D при этом остается инвариантной), вследствие чего в этой «микроскопической» постановке вопроса мы ни к какой эволюционной теореме для изолированной системы притти не можем.

Однако мы, следуя Гиббсу, делим область D на «ячейки» $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$; пусть P — произвольная точка области D; если она принадлежит ячейке Δ_k, положим

$$f^*(P) = \frac{1}{\Delta_k} \int_{\Delta_k} f(P)\, dv,$$

где в знаменателе Δ_k означает объем ячейки того же наименования, и вводим в функционал (7) вместо $f(P)$ именно эту «осредненную» или «огрубленную» плотность $f^*(P)$. $f^*(P)$ действительно является осреднением плотности $f(P)$ в том смысле, как мы это определили в § 1. В самом деле, положим, для двух произвольных точек P и Q области D, $\chi(P, Q) = \Delta_k^{-1}$, если P и Q принадлежат одной и той же ячейке Δ_k, и $\chi(P, Q) = 0$ в противном случае; очевидно, мы имеем $\chi(P, Q) \geqslant 0$ и

$$\int_D \chi(P, Q)\, dv_Q = \int_D \chi(P, Q)\, dv_P = 1,$$

$$f^*(P) = \int_D \chi(P, Q) f(Q)\, dv_Q,$$

откуда и следует, что распределение $f^*(P)$ является осреднением распределения $f(P)$. Поэтому в силу неравенства (4′)

$$H_\varphi(f^*) \leqslant H_\varphi(f). \tag{9}$$

Это неравенство будет иметь место для любого момента времени t; в начальный момент времени полагают обычно точную плотность $f_0(P)$ совпадающей с осредненной плотностью $f_0^*(P)$, мотивируя это тем, что в силу ограниченной точности наших измерений, естественно, налагающей свой отпечаток на распределение фиктивной «совокупности» систем в пространстве Г, мы можем исходить лишь из некоторых вероятностей $f_0^*\Delta_k$, приписываемых различным (малым, но все же конечных размеров) ячейкам Δ_k, внутри каждой из которых уже не имеем возможности различать между собою в вероятностном отношении отдельные точки. Таким образом, $f_0 \equiv f_0^*$ и $H_\varphi(f_0) = H_\varphi(f_0^*)$; но, как мы уже упоминали выше, в силу теоремы Лиувилля $H\ (f_0) = H_\varphi(f)$, где $f(P)$ — плотность в любой последующий момент времени t; поэтому неравенство (9) дает

$$H_\varphi(f^*) \leqslant H_\varphi(f) = H_\varphi(f_0) = H_\varphi(f_0^*).$$

Это неравенство и выражает собою (почти тривиальную при таком способе обоснования) эволюционную теорему Гиббса [обобщенную на случай любой непрерывной конвексной функции $\varphi(x)$].

4. Неравенства Клейна и Паули

В квантовой физике для эволюционных теорем рассматриваемого нами типа открываются значительно более широкие возможности, чем в классической; причиною этого служит то, что свойственный высказываниям квантовой механики статистический характер создает возможность эволюционных теорем и в «микроскопической» картине, т. е. для точных, не осредненных распределений, в то время как в классической механике с ее детерминированным движением фазового пространства теорема Лиувилля делает неизменной степень равномерности этих точных распределений в случае изолированных систем.

Простейший пример эволюционной теоремы «микроскопического» типа дает нам элементарное неравенство Клейна ([2]). Обозначим через $w_n(t)$ вероятность найти изучаемую квантовую систему, при надлежаще поставленном измерении, в n-ом стационарном состоянии (мы предполагаем, что эта система имеет чисто точечный энергетический спектр) тогда, как известно*,

$$w_n^1(t) = \sum_k |a_{nk}(t)|^2 w_k(0),$$

где комплексные числа $a_{nk}(t)$ представляют собою элементы некоторой зависящей от времени унитарной матрицы, так что в частности

$$\sum_k |a_{nk}(t)|^2 = \sum_n |a_{nk}(t)|^2 = 1;$$

это показывает, что распределение $w_n(t)$ является осреднением распределения $w_n(0)$; поэтому неравенство (3) дает для любой непрерывной конвексной функции $\varphi(x)$

$$\sum_n \varphi[w_n(t)] \leqslant \sum_n \varphi[w_n(0)];$$

это и есть неравенство Клейна.

Переходя от микроскопической картины к осредненной («макроскопической»), мы можем разбить совокупность стационарных состояний данной системы на «ячейки», т. е. группы близких друг к другу состояний, аналогично тому, как мы это делали в классической схеме (§ 3); осредненная вероятность $w_n^*(t)$ n-го стационарного состояния определяется как среднее арифметическое точных вероятностей

---

* См., например, R. C. Tolman, The principles of statistical mechanics, Oxford, 1938, стр. 468.

всех стационарных состояний, принадлежащих к той же группе («ячейке»). Неравенство Паули [3]

$$\sum_n \varphi[w_n^*(t)] \leqslant \sum_n \varphi[w_n^*(0)]$$

устанавливается тогда в точности таким же путем, каким мы в § 3 установили теорему Гиббса; единственное различие сведется к тому, что, вместо вытекающей из теоремы Лиувилля инвариантности фунционала $H_\varphi(f)$ для точных распределений, нам здесь придется воспользоваться неравенством Клейна; то обстоятельство, что равенство здесь заменяется неравенством, весьма характерным для квантовой механики образом усиливает проводимую аргументацию.

5. Теоремы Дж. Неймана

Мы докажем теперь нашим методом две интересных теоремы квантовой термодинамики, установленные Дж. Нейманом [1]; в обоих случаях речь идет об увеличении энтропии статистической совокупности квантовых систем при определенных внешних воздействиях. Известно, что статистика каждой совокупности квантовых систем полностью определяется заданием так называемого статистического оператора U, который мы будем предполагать имеющим чистый точечный спектр с собственными значениями $w_1, w_2, \ldots$ и собственными функциями $\psi_1, \psi_2, \ldots$, образующими полную и нормированную ортогональную систему. Среднее значение физической величины, которой соответствует эрмитовский оператор R, равно следу оператора UR, что мы будем обозначать через $\mathrm{Sp}(UR)$. Энтропия данной статистической совокупности выражается формулой

$$-N\varkappa\,\mathrm{Sp}(U\lg U) = -N\varkappa\sum_n w_n \lg w_n$$

(способ обоснования этого утверждения нас здесь не должен интересовать), где N — число входящих в данную совокупность систем, $\varkappa$ — абсолютная постоянная. Так как $w_n = (U\psi_n, \psi_n)$, то выражение для энтропии можно записать также в виде $-N\varkappa\sum_n (U\psi_n, \psi_n)\lg(U\psi_n, \psi_n)$; во всем дальнейшем мы положим $x\lg x = \varphi(x)$, отчасти для сокращения записи, а отчасти чтобы подчеркнуть справедливость всех наших рассуждений для любой конвексной непрерывной функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим связанную с данной системой физическую величину с оператором R и обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ полную ортогональную нормированную систему собственных функций этого оператора; как показал Нейман, измерение выбранной нами величины над каждой из входящих в данную совокупность систем изменяет ее статистику

таким образом, что новый статистический оператор U' получает выражение

$$U' = \sum_n (U\varphi_n, \varphi_n) P_{\varphi_n},$$

где P_{φ_n} — оператор проектирования на элемент φ_n, т. е. $P_{\varphi_n} f = (f, \varphi_n)\varphi_n$. Очевидно, что оператор U' имеет собственные значения $(U\varphi_n, \varphi_n)$ и собственные функции φ_n, так что для энтропии нашей совокупности после произведенных измерений получается выражение

$$-N\varkappa \sum_n \varphi[(U\varphi_n, \varphi_n)].$$

Первая теорема Неймана состоит в том, что *энтропия совокупности после измерения не может быть меньше, чем до измерения.* Мы должны, следовательно, в наших обозначениях доказать, что

$$\sum_n \varphi[(U\varphi_n, \varphi_n)] \leqslant \sum_n \varphi[(U\psi_n, \psi_n)].$$

Так как обе системы φ_n и ψ_n — полные, нормированные и ортогональные, то мы можем положить

$$\varphi_m = \sum_n a_{mn}\psi_n \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

где числа a_{mn} — элементы унитарной матрицы, т. е.

$$\sum_n |a_{mn}|^2 = \sum_m |a_{mn}|^2 = 1.$$

Но в таком случае

$$(U\varphi_m, \varphi_m) = \left(U \sum_n a_{mn}\psi_n, \varphi_m\right) =$$

$$= \sum_n a_{mn}(U\psi_n, \varphi_m) = \sum_n a_{mn}(w_n\psi_n, \varphi_m) =$$

$$= \sum_n a_{mn} w_n \left(\psi_n, \sum_k a_{mk}\psi_k\right) =$$

$$= \sum_n |a_{mn}|^2 w_n = \sum_n |a_{mn}|^2 (U\psi_n, \psi_n).$$

Таким образом, ряд чисел $(U\varphi_m, \varphi_m)$ является осреднением ряда $(U\psi_n, \psi_n)$; применяя неравенство (4), мы видим, что теорема доказана.

Вторая теорема Неймана утверждает, что *при смешении в любой пропорции* $\alpha : \beta$ $(\alpha + \beta = 1)$ *двух совокупностей со статистическими операторами* U *и* V *мы получаем новую совокупность* (*со статистическим оператором* $W = \alpha U + \beta V$), *энтропия которой не меньше, чем*

взвешенное среднее энтропий двух составляющих совокупностей, иначе говоря, что

$$\mathrm{Sp}\,[\varphi(\alpha U+\beta V)]\leqslant\alpha\,\mathrm{Sp}\,[\varphi(U)]+\beta\,\mathrm{Sp}\,[\varphi(V)].$$

Для доказательства обозначим соответственно через u_n, v_n, w_n собственные значения операторов U, V, W и через φ_n, ψ_n, χ_n — соответствующие собственные функции их, образующие в каждом из трех случаев полную нормированную ортогональную систему. Тогда, как известно,

$$U=\sum_n u_n P_{\varphi_n},\quad V=\sum_n v_n P_{\psi_n},$$

$$W=\alpha U+\beta V=\sum_n w_n P_{\chi_n}=\alpha\sum_n u_n P_{\varphi_n}+\beta\sum_n v_n P_{\psi_n}.$$

Далее, мы находим

$$w_n=(W\chi_n,\ \chi_n)=(\{\alpha U+\beta V\}\chi_n,\ \chi_n)=$$

$$=\left(\alpha\sum_k u_k P_{\varphi_k}\chi_n+\beta\sum_k v_k P_{\psi_k}\chi_n,\ \chi_n\right)=$$

$$=\left(\alpha\sum_k u_k(\chi_n,\ \varphi_k)\varphi_k+\beta\sum_k v_k(\chi_n,\ \psi_k)\psi_k,\ \chi_n\right)=$$

$$=\alpha\sum_k|(\chi_n,\ \varphi_k)|^2u_k+\beta\sum_k|(\chi_n,\ \psi_k)|^2v_k.$$

Так как

$$\sum_k|(\chi_n,\ \varphi_k)|^2=\sum_n|(\chi_n,\ \varphi_k)|^2=\sum_k|(\chi_n,\ \psi_k)|^2=\sum_n|(\chi_n,\ \psi_k)|^2=1,$$

то и

$$\alpha\sum_k|(\chi_n,\ \varphi_k)|^2+\beta\sum_k|(\chi_n,\ \psi_k)|^2=1,$$

вследствие чего в силу (3)

$$\varphi(w_n)\leqslant\alpha\sum_k|(\chi_n,\ \varphi_k)|^2\varphi(u_k)+\beta\sum_k|(\chi_n,\ \psi_k)|^2\varphi(v_k).$$

Суммируя последнее неравенство по n, находим

$$\sum_n\varphi(w_n)\leqslant\alpha\sum_k\varphi(u_k)+\beta\sum_k\varphi(v_k),$$

что и требовалось доказать.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
14 X 1942

ЛИТЕРАТУРА

[1] Neumann J. v., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.
[2] Klein O., Z. f. Phys., 72 (1931), 767.
[3] Pauli W., Sommerfeld-Festschrift, Leipzig, 1928.

A. KHINTCHINE. LES FONCTIONS CONVEXES ET LES THÉORÈMES D'ÉVOLUTION DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE

RÉSUMÉ

En remplaçant dans l'énoncé des théorèmes d'évolution de la mécanique statistique la fonction $x \lg x$ par une fonction convexe et continue arbitraire, on parvient à la fois à une généralisation raisonnable de leur portée et à une simplification essentielle de leurs démonstraiions. La méthode est appliquée au théorème classique de Gibbs, aux inégalités de Klein et Pauli et à deux théorèmes de J. v. Neumann.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 123—146 Série mathématique

Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ

ПРОБЛЕМА РЕЗОЛЬВЕНТ И КРИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Работа посвящена проблеме резольвент, т. е. проблеме нахождения по заданному уравнению, коэффициенты которого зависят от нескольких независимых параметров, резольвенты, число параметров в коэффициентах которой было бы возможно меньшим. Автор приводит проблему к исследованию критических многообразий в пространстве параметров уравнения.

Настоящая статья посвящена проблеме резольвент, поставленной Ф. Клейном (3) и значительно подвинутой Д. Гильбертом (1,2). Она состоит в нахождении такого рационального преобразования алгебраического уравнения, содержащего переменные параметры, чтобы преобразованное уравнение содержало возможно меньше независимых параметров. В то время как Клейн считал коэффициенты преобразования рациональными или содержащими наперед заданные иррациональности, Гильберт предполагал их зависящими от корней вспомогательных уравнений, в свою очередь, допускающих резольвенты с небольшим числом параметров.

Методы, при помощи которых делались попытки решить проблемы Клейна и Гильберта, тоже существенно различны. Проблема Клейна была приведена к задаче одевания группы Галуа заданного уравнения группой Ли, представляемой в пространстве возможно меньшего числа измерений. Я (5) показал, что уравнение n-ой степени с неограниченно переменными коэффициентами и знакопеременной группой Галуа не может быть преобразуемо к резольвенте, зависящей менее чем от $n-3$ параметров. Тем самым было обнаружено, что решение проблемы Клейна существенно отличается от решения проблемы Гильберта.

Для проблемы Гильберта сам Гильберт предложил частный прием, дающий для $n=5, 6, 7, 8, 9$ значения числа параметров в резольвентах, приводимые в следующей таблице:

n	5	6	7	8	9
s	1	2	3	4	4

Виман (7) показал, что при $n \geqslant 9$ существуют резольвенты с числом параметров $s \leqslant n-5$. При этом остается невыясненным, являются ли эти значения s наименьшими из возможных.

В настоящей статье предлагается новый принцип изучения резольвент. Этот принцип основан на рассмотрении высших критических многообразий в пространствах, образованных параметрами, от которых зависят коэффициенты заданного уравнения. Я называю высшим критическим многообразием совокупность точек в пространстве параметров, в которых несколько корней уравнения совпадают. Для каждого уравнения можно определить все типы высших критических многообразий. Если для данного уравнения найдена цепь из s критических многообразий, из которых каждое содержится в предыдущем как часть, то при бирациональном преобразовании уравнения эта цепь переходит в такую же цепь, у которой каждое многообразие имеет меньшее измерение, чем предыдущее. Это показывает, что уравнение не может иметь резольвенты менее чем с s параметрами. Это дает для значения s нижнюю границу (в то время как Гильберт и Виман дают верхнюю границу), если мы ограничимся рациональными резольвентами. Изучение иррациональных резольвент, требующее детального исследования критических многообразий для относительных полей, я откладываю до следующей статьи.

Применение этого метода к уравнениям с неограниченно переменными коэффициентами и с знакопеременной группой Галуа дает для нижней границы числа s значения

$$s=\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

которые весьма близки к значениям, найденным Гильбертом.

n	5	6	7	8	9
s	2	2	3	3	4

Однако сопоставление обоих значений s для $n=5$ показывает, что применение иррациональных резольвент имеет существенное значение.

Вопрос о том, будет ли найденная нижняя граница для s также и верхней границей, связан с вопросом о фактическом построении резольвент при помощи критических многообразий. В настоящее время я располагаю некоторыми соображениями, делающими весьма вероятным положительный ответ на этот вопрос. Однако они недостаточны для того, чтобы делать какое-либо категорическое заключение.

§ 1. Высшие критические многообразия

Дано уравнение

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \tag{1}$$

коэффициенты которого пусть будут полиномами от некоторого числа независимых переменных

$$u_1, u_2, \ldots, u_m$$

с коэффициентами из поля всех комплексных чисел. Будем представлять себе эти переменные комплексными координатами точек

пространства U, которое мы будем считать или m-мерным в комплексном смысле, или $2m$-мерным в вещественном смысле. Если для какой-нибудь точки P пространства U дискриминант D уравнения (1) не обращается в нуль, то корни

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

уравнения (1) определяются в окрестности точки P как аналитические функции от m переменных u_i, которые могут быть продолжены на все пространство U. Однако такое продолжение не всегда однозначно, если мы будем производить его по двум различным путям. Более того, если уравнение (1) неприводимо в области рациональных функций от $u_1, u_2, \ldots, u_m$, то в пространстве U можно найти замкнутый путь такого рода, что при продолжении вдоль него любой из корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переходит в любой другой из этих корней. В самом деле, если бы при продолжении по всем замкнутым путям корень x_1 переходил только в

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_k \quad (k < n),$$

то все элементарно симметрические функции от этих корней были бы однозначными во всем пространстве U. Отсюда следовало бы, что они рациональны относительно каждой из переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$, взятых в отдельности и, следовательно, от этих переменных в совокупности. Таким образом, уравнение (1) имело бы множитель степени $k < n$ с коэффициентами, рационально зависящими от $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Совокупность подстановок, получаемых в результате продолжения корней по всевозможным замкнутым путям пространства U, носит название группы монодромии G уравнения (1). Нетрудно убедиться, что она совпадает с группой Галуа этого уравнения, если в качестве области рациональности взять совокупность рациональных функций от $u_1, u_2, \ldots, u_m$ с любыми комплексными коэффициентами.

Всякий замкнутый путь в пространстве U может быть стянут в точку. Отсюда следует, что в U существуют бесконечно малые замкнутые пути, при обходе которых корни претерпевают нетождественные подстановки, и притом совокупность последних имеет композитом всю группу G. Ясно, что перемещаемые на бесконечно малом замкнутом пути корни должны быть бесконечно близки, так что такие пути лежат в окрестностях точек многообразия

$$D(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \tag{2}$$

где D — дискриминант уравнения (1).

Чтобы определить многообразия точек, в окрестностях которых существуют замкнутые пути, при обходе по которым корни претерпевают подстановки заданного цикленного типа (точнее, заданного класса элементов группы G), рассмотрим произведение

$$\prod_{S/G} (t_1 x_{a_1} + t_2 x_{a_2} + \ldots + t_n x_{a_n}) = \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n), \tag{3}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — независимые переменные, подстановка

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix},$$

а произведение распространено на все подстановки S группы G. Коэффициенты формы (3), очевидно, суть рациональные функции от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Запишем подстановку S в циклах

$$S = (1, 2, \ldots, \mu_1)(\mu_1 + 1, \ldots, \mu_2) \ldots (\mu_{k-1} + 1, \ldots, n).$$

Будем говорить, что точка P пространства U лежит в многообразии, соответствующем подстановке S, если в P имеют место совпадения:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = \ldots = x_{\mu_1}, \\ x_{\mu_1+1} = \ldots = x_{\mu_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\mu_{k-1}+1} = \ldots = x_n. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Если многообразие, соответствующее подстановке T (будем обозначать его через U_T), составляет часть многообразия U_S

$$U_T \subset U_S,$$

то будем говорить, что подстановка T *выше* подстановки S:

$$T > S. \tag{5}$$

Для того чтобы имело место (5), необходимо и достаточно, чтобы каждая совокупность корней, составляющих цикл в подстановке S, целиком входила в один и тот же цикл подстановки T.

В дальнейшем под $U_{(S)}$ мы будем разуметь многообразие точек из U, соответствующих одной из подстановок класса, в котором содержится S. Будем говорить, что класс (T) выше класса (S), если в (T) содержится подстановка, которая выше, чем какая-нибудь подстановка из (S).

Будем обозначать через Φ_S форму (3), в которой мы подчиним переменные $t_1, t_2, \ldots, t_n$ соотношениям

$$\begin{array}{l} t_1 + t_2 + \ldots + t_{\mu_1} = 0, \\ t_{\mu_1+1} + \ldots + t_{\mu_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{\mu_{k-1}+1} + \ldots + t_n = 0. \end{array} \tag{6}$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Чтобы точка P лежала на многообразии $U_{(S)}$, необходимо и достаточно, чтобы для этой точки все коэффициенты формы Φ_S обращались в нуль.*

Доказательство. 1° Условие необходимо. В самом деле, если для точки P имеют место совпадения (4), то линейная форма

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n$$

при условиях (6) обращается в нуль, так как

$$\left.\begin{aligned}
&t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n=\\
&=t_1x_1+\ldots+t_{\mu_1-1}x_{\mu_1-1}-(t_1+\ldots+t_{\mu_1-1})\,x_{\mu_1}+\\
&+t_{\mu_1+1}x_{\mu_1+1}+\ldots+t_{\mu_2-1}x_{\mu_2-1}-(t_{\mu_1+1}+\ldots+t_{\mu_2-1})\,x_{\mu_2}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+t_{\mu_{k-1}+1}\,x_{\mu_{k-1}+1}+\ldots+t_{n-1}x_{n-1}-(t_{\mu_{k-1}+1}+\ldots+t_{n-1})\,x_n=\\
&=t_1\,(x_1-x_{\mu_1})+\ldots+t_{\mu_1-1}\,(x_{\mu_1-1}-x_{\mu_1})+\\
&+t_{\mu_1+1}\,(x_{\mu_1+1}-x_{\mu_2})+\ldots+t_{\mu_2-1}\,(x_{\mu_2-1}-x_{\mu_2})+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+t_{\mu_{k-1}+1}\,(x_{\mu_{k-1}+1}-x_n)+\ldots+t_{n-1}\,(x_{n-1}-x_n).
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Если же для точки P имеют место совпадения, соответствующие какой-нибудь другой подстановке класса (S), то обратится в нуль какой-нибудь другой множитель выражения (3). Таким образом,

$$\Phi_S=0.$$

2° Условие достаточно. В самом деле, если в точке P имеет место

$$\Phi_S=0,$$

то при условиях (6) равен нулю по крайней мере один из множителей выражения (3). Представив его в форме, подобной (7), мы убедимся, что имеют место совпадения, подобные (4). Именно, если обращается в нуль множитель

$$t_1x_{\alpha_1}+t_2x_{\alpha_2}+\ldots+t_nx_{\alpha_n}=0,$$

где

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}\subset G,$$

то таблица совпадений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&x_{\alpha_1}=x_{\alpha_2}=\ldots=x_{\alpha_{\mu_1}},\\
&x_{\alpha_{\mu_1+1}}=\ldots=x_{\alpha_{\mu_2}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{\alpha_{\mu_{k-1}+1}}=\ldots=x_{\alpha_n},
\end{aligned}$$

т. е. будет соответствовать подстановке

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix}(1,\ 2,\ \ldots,\mu_1)\,(\mu_1+1,\ \ldots,\ \mu_2)\ldots$$
$$\ldots(\mu_{k-1}+1,\ \ldots,\ n)\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}=T^{-1}ST,$$

откуда следует, что точка P принадлежит многообразию $U_{(S)}$, что и требовалось доказать.

В кольце полиномов от $u_1, u_2, \ldots, u_m$, рационально выражающихся через коэффициенты уравнения (1), каждому многообразию $U_{(S)}$ соответствует полиномиальный идеал, представляющий совокупность поли-

номов, обращающихся в нуль на многообразии $U_{(S)}$. Обозначим такой идеал через $A_{(S)}$. Чтобы узнать, принадлежит ли заданный полином

$$h(u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

выражающийся через коэффициенты уравнения (1), идеалу $A_{(S)}$, выразим h через корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения (1), приравняем друг другу некоторые из них, сообразно с таблицей совпадений (4), и посмотрим, обратится ли после этого полином в нуль.

Если переменные $u_1, u_2, \ldots, u_m$ входят в коэффициенты уравнения (1) линейно, то $A_{(S)}$ будет простым идеалом. В самом деле, без нарушения общности можно предположить, что тогда отдельные переменные $u_1, u_2, \ldots, u_m$ рационально (и даже линейно) выражаются через коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда, если произведение полиномов $g \cdot h$ принадлежит $A_{(S)}$, выразим в g и h все переменные $u_1, u_2, \ldots, u_m$ через корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и приравняем некоторые из них друг другу сообразно с таблицей совпадений (4). Если при этом произведение $g \cdot h$ обратится в нуль, то должен обратиться в нуль по крайней мере один из его множителей, а это и доказывает простоту идеала $A_{(S)}$.

Заметим, что если мы, вместо подстановки S, возьмем любую другую подстановку $T^{-1}ST$ того же класса ($T \subset G$), то получим тот же идеал $A_{(S)}$. Это следует из того, что таблица совпадений для подстановки $T^{-1}ST$ получается из таблицы совпадений (4), если к ней применить подстановку T. С другой стороны, всякая рациональная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, рационально выражающаяся через $u_1, u_2, \ldots, u_m$, не изменяется, если к ней применить подстановку T.

§ 2. Группы инерции

Совокупность подстановок между корнями уравнения (1), образуемых при всевозможных бесконечно малых обходах, взятых в окрестности какой-нибудь точки P пространства U, мы будем, по аналогии с теорией алгебраических (вернее, p-адических чисел), называть **группой инерции** точки P. Зададимся целью определить группу инерции для точки P, лежащей на многообразии $U_{(S)}$. С одной стороны, ясно, что корни, переходящие друг в друга при обходах в окрестности точки P, должны в точке P совпадать. Отсюда следует, что всякая подстановка группы инерции не выше одной из подстановок класса (S). Обратное справедливо только при некоторых оговорках. Для облегчения исследования сначала предположим, что переменные $u_1, u_2, \ldots, u_m$ входят в коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно. Это, в частности, будет иметь место, если мы в качестве U станем рассматривать пространство коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В нашем случае уравнение (1) можно переписать в форме

$$f_0(x) + f_1(x)(u_1 - p_1) + f_2(x)(u_2 - p_2) + \ldots + f_m(x)(u_m - p_m) = 0, \quad (8)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — координаты точки P. Полиномы $f_0(x), f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_m(x)$ не имеют общих множителей, так как корни всякого их общего множителя были бы корнями уравнения (1) и вместе с тем не зависели бы от $u_1, u_2, \ldots, u_m$, что противоречит неприводимости уравнения (1).

Предположим, что точка P лежит на $U_{(S)}$, но не лежит ни на одном из более высоких критических многообразий. Тогда полином $f_0(x)$ будет иметь постоянные корни, совпадения которых точно соответствуют таблице (4). Обозначая их через $b_1, b_2, \ldots, b_n$, мы, таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = \ldots &= b_{\mu_1} \\ b_{\mu_1+1} = \ldots &= b_{\mu_2}, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots \\ b_{\mu_{k-1}+1} = \ldots &= b_n, \end{aligned} \tag{9}$$

причем ни одно из значений

$$b_1, \; b_{\mu_1+1}, \ldots, b_{\mu_{k-1}+1}$$

не совпадает ни с одним другим. В силу взаимной простоты полиномов $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ можно подобрать константы $c_1, c_2, \ldots, c_m$ так, чтобы полином

$$g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_m f_m(x)$$

был взаимно прост с $f_0(x)$, т. е. не обращался в нуль ни при одном из значений (9). Произведем над $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейное преобразование

$$\begin{aligned} u_1 - p_1 &= c_1 v_1, \\ u_2 - p_2 &= c_2 v_1 + v_2 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ u_m - p_m &= c_m v_1 + v_m. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (8) перепишется так:

$$f_0(x) + g(x) v_1 + f_2(x) v_2 + \ldots + f_m(x) v_m = 0. \tag{10}$$

Переменные $v_1, v_2, \ldots, v_m$ в точке P обращаются в нуль. Полагая

$$v_2 = v_3 = \ldots = v_m = 0, \tag{11}$$

получим

$$v_1 = -\frac{f_0(x)}{g(x)} = -\frac{(x-b_1)^{\mu_1}(x-b_2)^{\mu_2}\ldots(x-b_{\mu_{k-1}+1})^{\mu_k}}{g(x)}, \tag{12}$$

где знаменатель $g(x)$ взаимно прост с числителем, т. е. не обращается в нуль при $v_1 = 0$. Если в этом уравнении мы положим

$$v_1 = \rho e^{i\theta}, \tag{13}$$

где $\rho > 0$ весьма малое число, а θ заставим пробегать значения от 0 до 2π, то из теоремы о непрерывности корней алгебраических уравне-

ний будет следовать, что μ_1 из корней уравнения (12) будут весьма близки к b_1, μ_2 — к b_2 и т. д. При этом при полном обходе значений θ от 0 до 2π корни каждой из этих категорий будут циклически переходить друг в друга, и, таким образом, все корни претерпят подстановку того же цикленного типа, что и подстановка S.

Вместе с тем равенства (12) и (13) определяют в пространстве U весьма малую окружность вокруг точки P. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Группа инерции точки P содержит подстановку, циклы которой соответствуют строкам в таблице совпадения корней, имеющего место для точки P.*

Исследуем, каковы типы низших подстановок, входяших в группу инерции точки P. Если в точке P пересекаются несколько более низких, чем $U_{(S)}$, критических многообразий, например многообразие $U_{(S_1)}$, то в любой окрестности точки P содержится бесчисленное множество точек, для которых $U_{(S_1)}$ есть наивысшее из критических многообразий, на которых они лежат. Из этого в силу теоремы 2 следует, что в любой окрестности точки P существуют пути, при обходе по которым корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ претерпевают подстановку, подобную подстановке S_1. Отсюда мы имеем:

ЛЕММА 1. *Группа инерции точки P содержит подстановки всех цикленных типов, соответствующих таблицам совпадений тех критических многообразий, на которых лежит P.*

Справедливо также обратное утверждение. Для доказательства нам будут необходимы следующие леммы:

ЛЕММА 2. *В каждой цепи содержащихся одно в другом критических многообразий*

$$U_{(S_1)} \supset U_{(S_2)} \supset \ldots \supset U_{(S_r)}$$

измерение каждого последующего по крайней мере на единицу меньше, чем измерение предыдущего.

Доказательство. Это следует из того, что, как мы убедились в § 1, идеал, соответствующий каждому критическому многообразию, есть простой идеал. В самом деле, существует теорема [см. ван-дер-Варден ([6]), стр. 63], согласно которой два простых идеала, из которых один содержится в другом, только тогда имеют одинаковое измерение, если они совпадают.

Следствие. Самое низшее, т. е. не содержащееся как часть в другом, критическое многообразие имеет комплексное измерение $\leqslant m-1$.

Будем теперь рассматривать пространство U как $2m$-мерное вещественное пространство. Из только что доказанного вытекает, что низшие критические многообразия имеют измерение $\leqslant 2m-2$. Пусть какая-нибудь точка пространства U, принадлежащая к одному из высших (может быть, не к самому высшему) критических многообразий $U_{(S)}$ и вместе с тем не принадлежащая ни к одному из более высоких крити-

ческих многообразий *, имеет в своей окрестности замкнутую кривую C, при обходе по которой корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ претерпевают подстановку S. Проведем через C двумерное многообразие A (натянем пленку), которое пусть не пересекается ни с P, ни с одним из более высоких, чем самое низшее, критических многообразий. Этого всегда можно достигнуть путем малых деформаций многообразия A, так как, в силу леммы 2, всякое высшее критическое многообразие имеет вещественное измерение $\leqslant 2m-4$. С другой стороны, если S не есть тождественная подстановка, то A обязательно пересекает низшее критическое многообразие. В самом деле, в противном случае, разбив A на сколь угодно малые площадки, мы могли бы рассматривать контур каждой из этих площадок как замкнутую кривую, находящуюся в окрестности некритической точки. Следовательно, при обходе по каждому из этих контуров корни претерпевают тождественную подстановку. Но так как обход по C равносилен совокупности обходов по этим контурам, произведенных в определенном порядке, то обход по C тоже производил бы среди корней тождественную подстановку, что противоречит предположению.

Мы можем предположить многообразие A алгебраическим. Тогда при помощи малой деформации число его пересечений с критическими многообразиями можно сделать конечным. Пусть точки этих пересечений будут $P_1, P_2, \ldots, P_k$ и пусть обходам вокруг них (по кривым, лежащим на A) соответствуют низшие подстановки $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Очевидно, их можно занумеровать в таком порядке, чтобы имело место

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_k = S.$$

Отсюда следует

ЛЕММА 3. *Все подстановки группы инерции точки P суть произведения низших подстановок, соответствующих точкам низшего критического многообразия, находящимся в окрестности точки P.*

Из хода доказательства этой леммы, как побочное следствие, вытекает

ЛЕММА 4. *Вещественное измерение низшего критического многообразия в точности равно $2m-2$.*

Действительно, если бы это измерение было меньше $2m-2$, то многообразие A после малой деформации не имело бы пересечений с критическими многообразиями.

Вообще теперь мы можем уточнить лемму 2. Многообразие $U_{(S_2)}$ является пересечением или двух различных низших многообразий, или двух полей одного и того же многообразия $U_{(S_1)}$. В самом деле, в силу леммы 3 высшая соответствующая ему подстановка есть произведение низших подстановок, а соответствующие двум низшим подстановкам многообразия в пересечении образуют высшее критическое много-

* Последнее условие не играет роли при доказательстве и поэтому в случае нужды может быть отброшено.

образие, измерение которого, таким образом, равно $2m-4$. Продолжая рассуждение, получим следующую лемму:

ЛЕММА 5. *В цепи содержащихся одно в другом последовательных критических многообразий*

$$U_{(S_1)} \supset U_{(S_2)} \supset \ldots \supset U_{(S_k)}$$

вещественное измерение каждого равно соответственно

$$2m-2,\ 2m-4,\ \ldots,\ 2m-2k.$$

Пусть в группе инерции точки P содержится подстановка S, может быть, не самая высшая для точки P. Из леммы 3 следует, что ее можно представить в виде произведения низших подстановок

$$S = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_k.$$

Это означает, что точка P лежит на пересечении низших критических многообразий. В силу леммы 5, их пересечение образует критическое многообразие измерения $2m-2k$. Поэтому в окрестности точки P лежит ∞^{2m-2k} точек многообразия $U_{(S)}$, из которых только самое большее $\infty^{2m-2k-2}$ * принадлежит к высшим критическим многообразиям. Таким образом, в окрестности точки P находятся точки, для которых $U_{(S)}$ есть высшее многообразие, на котором они лежат. Сопоставляя с теоремой 2, мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 3. *Группа инерции точки P тогда и только тогда содержит подстановку S, если в ее окрестности находятся точки, для которых $U_{(S)}$ есть наивысшее критическое многообразие.*

Перейдем к рассмотрению более общих случаев. Пусть коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уравнения (1)—произвольные полиномы от $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Построим пространство A коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые мы будем считать независимыми переменными. Для такого пространства мы умеем найти и критические многообразия, и группы инерции. Каждой точке пространства U соответствует одна точка пространства A, и замкнутому пути в пространстве U соответствует замкнутый путь в пространстве A. Обратно, каждой точке пространства A соответствует несколько точек пространства U, причем некоторые из них могут быть кратными, в силу чего замкнутому пути в пространстве A может соответствовать разомкнутый путь в пространстве U. Другими словами, замкнутому пути в пространстве U может соответствовать несколько раз повторенный замкнутый путь в пространстве A.

Точка пространства U является критической только тогда, если ей соответствует критическая точка пространства A. Однако может случиться, что критической точке пространства A соответствуют обыкновенные точки пространства U. Это имеет место в том случае, если для производства замкнутого пути в окрестности некоторой точки

* Когда речь идет об алгебраических многообразиях, употребление старинного обозначения ∞^{ν}, придает изложению бо́льшую ясность и в то же время не может привести ни к каким недоразумениям.

пространства U мы должны обойти одну из соответствующих точек пространства A число раз, кратное порядкам каждой из подстановок. Таким образом, числа содержащихся друг в друге критических многообразий в пространстве U не превышают этих чисел в пространстве A. Оставляя детальный анализ взаимоотношений между пространствами U и A до другого случая, замечу, что в пространстве U критическим многообразиям могут соответствовать и не простые полиномиальные идеалы.

Если параметры $u_1, u_2, \ldots, u_m$ коэффициентов уравнения (1) подчинены алгебраической зависимости

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \tag{14}$$

то мы должны выделить в пространстве U алгебраическую поверхность, определяемую уравнением (14), которую мы и будем считать параметрическим пространством U_1 уравнения (1). В пространстве U_1 допустимыми замкнутыми путями должны считаться только те, все точки которых лежат на поверхности (14), и группы инерции критических точек должны быть определяемы только для таких путей. Заметим, что в такого рода пространствах U_1 не имеет места теорема монодромии: может существовать функция на U_1, однозначная относительно всех бесконечно малых замкнутых путей, но не однозначная в целом. Классическая (двумерная) теория римановых поверхностей дает примеры таких функций.

В некоторых случаях переменные $u_1, u_2, \ldots, u_m$ независимы, но вместе с тем задана группа Галуа G уравнения (1). Тогда параметрическое пространство уравнения (1) строится следующим образом. Составляется функция от корней уравнения (1), принадлежащая к группе G. Обозначим ее через u_{m+1}. Пусть в поле рациональных функций от $u_1, u_2, \ldots, u_m$ она удовлетворяет неприводимому уравнению

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}) = 0. \tag{15}$$

Определим параметрическое пространство U как поверхность (15) в $(m+1)$-мерном пространстве с координатами $u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}$.

Заметим, что если мы будем определять замкнутый путь в пространстве U' с координатами $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (проекция пространства U), то в пространстве U он будет замкнутым только тогда, если при его обходе функция u_{m+1} будет возвращаться к своему исходному значению; другими словами, если подстановка S, совершаемая корнями уравнения (1) при обходе этого пути, содержится в G. В противном случае замкнутый обход в U можно представить в виде k-кратного обхода в U', где k—наименьший показатель, при котором

$$S^k \subset G.$$

§ 3. Проблема резольвент в различных формулировках

Пусть даны два алгебраических уравнения

$$f(x)=0, \tag{16}$$

$$g(y)=0 \tag{17}$$

одной и той же степени n и с изоморфными группами Галуа $G, \bar{G}$. Будем считать для них областью рациональности композит полей, образованных коэффициентами, а также функциями от корней уравнений (16), (17), принадлежащими к группам G, $\bar{G}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Чтобы корни уравнений* (16), (17) *находились в рациональной зависимости*

$$y_i=\alpha_0+\alpha_1 x_i+\ldots+\alpha_{n-1}x_i^{n-1} \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$F(u)=0, \tag{19}$$

корнем которого является величина

$$u=\sum_{k=0}^{n-1} t_k(x_1^k y_1+x_2^k y_2+\ldots+x_n^k y_n), \tag{20}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — *неопределенные переменные (которые мы включим в область рациональности), имело по крайней мере один рациональный корень.*

Доказательство. Если имеют место зависимости (18), где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — рациональные величины, то, подставляя (18) в (20), получим для каждой из величин

$$u_k=x_1^k y_1+x_2^k y_2+\ldots+x_n^k y_n \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{21}$$

выражение

$$u_k=\alpha_0 s_k+\alpha_1 s_{k+1}+\ldots+\alpha_{n-1}s_{n+k-1}, \tag{22}$$

где s_m — сумма m-ых степеней корней уравнения (16), т. е. рациональные величины. Из формулы (22) следует, что в этом случае u_k, а значит и u, суть рациональные величины.

Теперь предположим, что условия теоремы выполнены. Чтобы составить уравнение (19), которому удовлетворяет u, условимся обозначать через S и $\bar{S}$ формально одинаковые подстановки, производимые соответственно над корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Производя над выражением (20) подстановку S или, что то же, подстановку $\bar{S}^{-1}$ [так как выражение (20) инвариантно относительно подстановок $S\bar{S}$], мы переведем u в выражение u^S. Заставляя s пробегать группу G, получим величины, элементарно симметрические функции от которых

симметричны относительно каждой из систем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в силу чего величины

$$u^S = \sum_k t_k u_k^S$$

являются корнями уравнения (19), коэффициенты которого рациональны.

Группа Галуа поля, образованного всеми корнями x_i, y_i, есть подгруппа прямого произведения $G \times G$. В этом поле величина u принадлежит или к группе, составленной из произведений $S\overline{S}$ (будем обозначать ее через GG), или к ее надгруппе. Однако, если уравнения (16) и (17) не имеют кратных корней, то не существует подстановок, отличных от $S\overline{S}$, которые оставляли бы инвариантной величину u, т. е., иначе говоря, все величины u_k. В самом деле, пусть существует такая подстановка, $S_1\overline{S}_2\,(S_1 \neq S_2)$. Умножая ее на $(S_1\overline{S}_1)^{-1}$, получим подстановку

$$\overline{S}_2\overline{S}_1^{\,-1} = \overline{S}_3 \neq 1,$$

относительно которой все величины u_k будут инвариантны. Полагая

$$\overline{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

придем к равенствам

$$u_k - u_k^{\overline{S}_3} = x_1^k(y_1 - y_{\alpha_1}) + x_2^k(y_2 - y_{\alpha_2}) + , \ldots , + x_n^k(y_n - y_{\alpha_n}) = 0.$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Рассматривая их как систему однородных линейных уравнений относительно $y_k - y_{\alpha_k}$ с неравным нулю определителем [вандермондов определитель от корней уравнения (16)], мы получим

$$y_k - y_{\alpha_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

что находится в противоречии с тем, что уравнение (17) не имеет кратных корней.

Отсюда следует, что величина

$$u = \sum_k t_k u_k$$

принадлежит группе $G\overline{G}$. Если уравнение (19) имеет рациональный корень, то это означает, что группа Галуа поля, образованного корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, есть одна из групп, сопряженных с $G\overline{G}$. Меняя нумерацию корней $y_1, y_2, \ldots, y_n$, мы добьемся ее совпадения с $G\overline{G}$. Тогда все величины u_k будут рациональны. Решая относительно $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ систему уравнений (22), мы получим для $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ рациональные выражения. Тогда формулы (18) будут удовлетворять требованиям теоремы, что и требовалось доказать.

Примечание. Если уравнение (17) не имеет кратных корней, то формулы (18) обратимы. Это следует, например, из теоремы 47 моих «Основ теории Галуа»([4]).

Будем называть *преобразуемыми* уравнения (16), (17) в том случае, если между их корнями имеет место рациональная зависимость типа (18).

Проблема резольвент, поставленная в различных формулировках Клейном([3]) и Гильбертом ([1,2]), может быть поставлена в следующем виде, более общем и вместе с тем более просто формулируемом:

Дано уравнение, коэффициенты которого зависят от $m\,(\leqslant n)$ параметров. Требуется найти преобразуемое в него уравнение, коэффициенты которого зависели бы от возможно меньшего числа параметров (которое мы обозначим через s).

Коэффициенты (или параметры) уравнений (16) и (17) могут и не зависеть рационально друг от друга. Задача состоит в установлении между ними таких алгебраических зависимостей, чтобы при этом соблюдались два условия:

1) Преобразование (18) должно быть обратимым. Мы видели, что это условие всегда соблюдается, если уравнения (16) и (17) не имеют кратных корней.

2) Уравнение (19) должно иметь корень, рационально зависящий от коэффициентов уравнений (16) и (17), а также от функций от их корней, принадлежащих соответственно к группам G и $\overline{G}$.

Сравним приведенную формулировку проблемы резольвент с формулировками, предложенными Клейном и Гильбертом.

Проблема Клейна. По данному уравнению (16) найти такое уравнение (17), зависящее от возможно меньшего числа s параметров, чтобы между их корнями имели место зависимости типа (18), коэффициенты которых $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ должны рационально зависеть от коэффициентов уравнения (16).

Как обобщение проблемы Клейна рассматривается допущение зависимости $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ еще от некоторых наперед заданных иррациональностей.

Проблема Клейна является более частной, т. е. налагающей больше требований, по сравнению с проблемой Гильберта.

Проблема Гильберта. По данному уравнению (16) найти такое уравнение (17) (будем называть его резольвентой), зависящее от возможно меньшего числа (s) параметров, чтобы коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ зависимостей (18) между их корнями определялись при помощи вспомогательного уравнения, которое, в свою очередь, должно иметь резольвенту с $\leqslant s$ параметрами, причем коэффициенты зависимостей между корнями последних опять должны зависеть от корней уравнения, допускающего резольвенту с $\leqslant s$ параметрами, и т. д. Число получаемых при этом вспомогательных уравнений должно быть конечно.

Докажем, что проблема Гильберта является частной по сравнению с формулированной нами проблемой. Достаточно ограничиться случаем,

когда G есть простая группа. В самом деле, если G имеет нормальный делитель H, то мы предварительно должны решить проблему Гильберта для вспомогательного уравнения, группа Галуа которого изоморфна с факторгруппой G/H. Затем, считая это уравнение вспомогательным и присоединяя его корни к области рациональности, понизим группу Галуа заданного уравнения до H. Таким образом, число s в проблеме Гильберта для уравнений с группой Галуа равно наибольшему из чисел s в проблеме Гильберта для уравнений с группами Галуа H и G/H.

Предположим, что уравнение (16) с простой группой Галуа G имеет s-параметрическую резольвенту (17) в смысле Гильберта. Докажем, что (17) будет также резольвентой и в нашем смысле. Допустим противное: пусть уравнение (19) не имеет рационального корня, если считать областью рациональности композит полей коэффициентов уравнений (16) и (17). В этой области рациональности поле, образованное корнями уравнений (16) и (17), имеет группой Галуа некоторую подгруппу прямого произведения $G \times \bar{G}$, которая, таким образом, не содержится ни в группе $G\bar{G}$, образованной подстановками типа $S\bar{S}$, ни в одной из сопряженных с $G\bar{G}$ групп.

Прежде всего докажем, что группа уравнения (16) не снизится, если к области рациональности присоединить коэффициенты уравнения (17). Действительно, в противном случае это поле содержало бы натуральную иррациональность, принадлежащую к настоящей подгруппе G. Ее пересечение со всеми сопряженными подгруппами есть единичная группа, в силу чего эта иррациональность будет корнем уравнения, группа Галуа которого изоморфна с G. Таким образом, поле корней этого уравнения, которое должно быть рассматриваемо как вспомогательное (поле, образованное величинами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, должно его содержать), содержит в себе корни исходного уравнения (16). Это означает, что резольвента для вспомогательного уравнения будет иметь не меньше параметров, чем резольвента (17), и новое вспомогательное уравнение опять будет содержать ту же иррациональность и т. д., так что процесс никогда не кончится.

Меняя ролями уравнения (16) и (17), мы докажем, что в области рациональности, образованной коэффициентами уравнений (16) и (17), группы Галуа обоих этих уравнений изоморфны с G.

Если поля K_1, K_2, образованные соответственно корнями уравнений (16) и (17), взаимно просты, т. е. имеют пересечением композит полей коэффициентов, то группа композита $K_1 \times K_2$ изоморфна с $G \times G$. Так как, кроме G и $\bar{G}$, эта группа не имеет других нормальных делителей, то группа $G\bar{G}$, к которой принадлежит корень уравнения (19), не есть нормальный делитель группы $G \times \bar{G}$ и, более того, имеет с сопряженными подгруппами единичную группу в качестве пересечения. В силу этого группа уравнения (19) изоморфна с $G \times \bar{G}$. Отсюда следует, что корни уравнений (16) и (17) содержатся в поле

корней уравнения (19), так что последнее, будучи вспомогательным уравнением, имеет не более простое решение, чем каждое из уравнений (16) и (17).

Пересечение полей K_1 и K_2 есть нормальное поле, и потому внутри каждого из полей K_1, K_2 принадлежит соответственно к нормальным делителям групп G, $\bar{G}$. В силу простоты последних групп это пересечение, если оно не есть композит полей коэффициентов, должно совпадать с каждым из полей K_1, K_2.

Отсюда еще не всегда следует существование рациональной зависимости типа (18) между корнями уравнений (16) и (17). Именно, она не имеет места тогда и только тогда, когда G допускает несколько различных (т. е. не переходящих друг в друга путем изменения порядка цифр) представлений в виде транзитивной группы подстановок из n цифр, т. е. если G имеет внешние автоморфизмы. Например, это имеет место, когда G—знакопеременная группа из 6 цифр. Однако и в этом случае наше утверждение остается в силе. Именно, если уравнения (16) и (17) таковы, что образованные их корнями поля K_1 и K_2 совпадают, то можно преобразовать резольвенту (17) так, чтобы после этого между корнями уравнений (16) и (17) установились рациональные зависимости типа (18). Для этого надо составить уравнение n-ой степени, корень которого, будучи элементом поля K_2, принадлежал бы к той же группе внутри поля K_1, к которой принадлежит корень уравнения (16). Построенное таким образом уравнение, являясь преобразуемым в уравнение (16), в то же время остается s-параметрическим.

Вопрос об условиях, при которых обе проблемы эквивалентны, требует специального исследования.

§ 4. Условия, необходимые для существования резольвенты

В настоящей статье мы ограничимся случаем, когда область рациональности резольвенты (17) совпадает с областью рациональности уравнения (16). Пусть коэффициенты уравнения (16) рационально зависят от параметров $u_1, u_2, \ldots, u_m$, и пусть s параметров резольвенты (17) $v_1, v_2, \ldots, v_s$ приведены с $u_1, u_2, \ldots, u_m$ в такое соответствие, что являются их целыми рациональными функциями. Тогда каждому замкнутому пути пространства

$$U(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

будет соответствовать вполне определенный замкнутый путь пространства

$$V(v_1, v_2, \ldots, v_s).$$

Если при этом первый из путей находится в окрестности какой-нибудь одной точки (т. е. бесконечно мал), то и второй путь находится в окрестности определенной точки.

Если при обходе по замкнутому пути C в окрестности точки P корни уравнения (16) претерпевают подстановку S, то при обходе по

соответствующему пути $\bar{C}$ пространства V корни уравнения (17) претерпевают подстановку $\bar{S}$, отличающуюся от S только другими переставляемыми объектами. В самом деле, пусть рациональный корень уравнения (19) имеет вид

$$\sum_k t_k u_k,$$

где

$$u_k = x_1^k y_1 + x_2^k y_2 + \ldots + x_n^k y_n, \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Если бы при обходе пути C корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ претерпевали подстановку

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{\alpha_1} & x_{\alpha_1} & \ldots & x_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

а при обходе пути $\bar{C}$ корни $y_1, y_2, \ldots, y_n$ претерпевали бы подстановку

$$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_{\beta_1} & y_{\beta_2} & \ldots & y_{\beta_n} \end{pmatrix},$$

то в силу однозначности функций u_k должно быть

$$x_{\alpha_1}^k y_{\beta_1} + x_{\alpha_2}^k y_{\beta_2} + \ldots + x_{\alpha_n}^k y_{\beta_n} = x_1^k y_1 + x_2^k y_2 + x_n^k y_n \;\; (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

откуда

$$x_1^k (y_1 - y_{\gamma_1}) + x_2^k (y_2 - y_{\gamma_2}) + \ldots + x_n^k (y_n - y_{\gamma_n}) = 0, \qquad (23)$$
$$(k=0, 1, \ldots, n-1),$$

где

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

откуда

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot S_1.$$

Но так как путь C проходит по не критическим точкам пространства U, то определитель системы однородных линейных уравнений (23) на пути C нигде не обращается в нуль, откуда мы получаем

$$y_1 = y_{\gamma_1}, \quad y_2 = y_{\gamma_2}, \ldots, y_n = y_{\gamma_n}. \qquad (24)$$

С другой стороны, зависимости (18) между корнями уравнений (16) и (17) предполагаются обратимыми, в силу чего на пути $\bar{C}$ корни уравнения (17) также не делаются кратными. Поэтому из равенств (24) мы имеем

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \; \ldots, \quad \gamma_n = n,$$

откуда

$$S_1 = S.$$

Мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА 5. *Если параметры уравнения* (17) — *целые рациональные функции от параметров уравнений* (16) *и оба эти уравнения преобразуемы друг в друга, то соответственные точки пространств, образуемых параметрами уравнения* (17), *имеют группы инерции, содержащие, как подгруппы, группы, изоморфные с группами инерции точек пространства параметров уравнения* (16).

Рассмотрим случай, когда параметры $u_1, u_2, \ldots, u_m$ входят в коэффициенты уравнения (16) линейно. Пусть уравнение (17) становится преобразуемым по отношению к уравнению (16), если мы положим вместо параметров $v_1, v_2, \ldots, v_s$ полиномы; $v_1 = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m), \ldots, v_s = \varphi_s(u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Из теоремы 5 следует, что точкам критических многообразий пространства U соответствуют точки критических многообразий пространства V. Если мы условимся считать допустимыми замкнутыми путями в проотранстве V только те, которым соответствуют замкнутые пути в пространстве U, то в силу теоремы 5 группы инерции соответствующих точек изоморфны.

Пусть пространство U содержит цепь из содержащихся друг в друге критических многообразий

$$U_{(S_1)} \supset U_{(S_2)} \supset \ldots \supset U_{(S_q)}.$$

Этим многообразиям пусть в пространстве V соответствуют многообразия

$$V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_q.$$

Докажем, что эти многообразия имеют различные измерения. С одной стороны, ни одна пара соседних многообразий V_i, V_{i+1} не может совпадать. В самом деле, пусть P будет точка пространства U, принадлежащая многообразию $U_{(S_{i+1}}$, но не принадлежащая никакому более высокому многообразию. В силу теоремы 3 в ее окрестности содержатся точки P' многообразия $U_{(S_i)}$, не принадлежащие многообразию $U_{(S_{i+1})}$, и, следовательно, группы инерции которых не совпадают с группами инерции точки P (порядок последней выше). Пусть в пространстве V точкам P, P' соответствуют точки Q, Q'. При нашем условии относительно допустимых замкнутых путей из теоремы 5 следует, что группы инерции точек Q и Q' различны. Обе они лежат на многообразии V_i, но вместе с тем точка Q лежит на многообразии V_{i+1}, а точка Q' нет.

С другой стороны, многообразиям V_i соответствуют простые идеалы B_i. В самом деле, чтобы узнать, лежит ли полином $g(v_1, v_2, \ldots, v_s)$ в идеале B_i, надо выразить переменные $v_1, v_2, \ldots, v_s$ через $u_1, u_2, \ldots, u_m$, которые, в свою очередь, выражаются через корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения (16). После этого мы должны приравнять друг другу эти корни сообразно с таблицей совпадений, соответствующей подстановке S_i. Полином g лежит в идеале B_i тогда и только тогда, если он после указанных операций обратится в нуль. Из этого критерия следует, что произведение $g \cdot h$ лежит в B_i. Таким образом, B_i есть простой идеал.

Из этого следует, что все измерения многообразий $V_1, V_2, \ldots, V_q$ различны, и так как измерение многообразия V_q не меньше нуля, то V_1 имеет измерение $\geqslant q-1$. Но так как V_1 есть критическое многообразие, а V содержит не-критические точки, то измерение пространства V не меньше, чем q, и мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА 6. *Если уравнение типа* (16) *с параметрами, линейно входящими в коэффициенты, содержит цепь из q критических многообразий, из которых каждое последующее содержится в предыдущем, то всякая рациональная резольвента содержит не менее q параметров.*

Эта теорема дает возможность установить нижнюю границу для числа параметров резольвенты.

В виде примера рассмотрим самые общие уравнения (т. е. с независимыми переменными в качестве коэффициентов) со знакопеременной группой Галуа. В этом случае U есть поверхность, определяемая в $(n+1)$-мерном пространстве $a_1, a_2, \ldots, a_n, z$ при помощи уравнения

$$z^2 - D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

где D — дискриминант уравнения (16). Нетрудно убедиться, что каждому типу четных подстановок в пространстве U соответствует критическое многообразие. В самом деле, мы всегда имеем возможность сконструировать уравнение (может быть, приводимое), у которого группа Галуа состоит из степеней любой четной подстановки S. Это уравнение будет частным видом уравнения (16), поскольку у последнего коэффициенты суть независимые переменные. С другой стороны, построенное таким образом уравнение непременно будет иметь в своем параметрическом пространстве (которое получается из U придаванием некоторым из коэффициентов частных значений) критическое многообразие U_S.

Например, если

$$S = (1, 2, \ldots, \mu_1)(\mu_1+1, \ldots, \mu_2) \ldots (\mu_{k-1}+1, \ldots, n),$$

то в качестве такого частного уравнения можно взять

$$(x^{\mu_1} - w_1)(x^{\mu_2-\mu_1} - w_2) \ldots (x^{n-\mu_{k-1}} - w_k) = 0,$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_k$ — независимые переменные.

Таким образом, в нашем случае мы получим нижнюю границу для возможного числа параметров резольвенты уравнения (16), если подсчитаем максимальное число звеньев во всевозможных цепях из четных подстановок n-ой степени, в которых последующий член выше предыдущего. Одной из таких цепей может служить

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_{\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

где

$$S_1 = (123),\ S_2 = (12345),\ \ldots,\ S_i = (123\ldots 2i+1);$$
$$i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Эта цепь состоит из $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ звеньев.

Докажем, что в знакопеременной группе n-ой степени не содержится цепей большей длины, чем $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. В самом деле, отмечая в каждой подстановке число содержащихся в ней циклов, включая в это число и одночленные циклы (инвариантные цифры), заметим, что для четной подстановки это число имеет ту же четность, что n. С другой стороны, если, например,

$$T_1 < T_2,$$

то подстановка T_2 непременно должна содержать меньшее число циклов, чем T_1. В силу одинаковой четности эти числа должны отличаться, по крайней мере, на 2. Поэтому числа циклов в подстановках цепи

$$T_k > T_{k-1} > \ldots > T_2 > T_1$$

не могут быть меньше, чем соответственно числа

$$1, 3, 5, \ldots, 2k-1.$$

Но T_1 не может быть ни тождественной подстановкой, ни транспозицией, в силу чего

$$2k-1 \leqslant n-2,$$

откуда

$$k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Таким образом, искомая нижняя граница для числа параметров равна

$$s = \left[\frac{n-1}{2}\right]. \tag{25}$$

Сопоставим эти значения с теми, которые были получены Гильбертом (²) для $5 \leqslant n \leqslant 9$:

	5	6	7	8	9
s [по формуле (25)]	2	2	3	3	4
s [по Гильберту]	1	2	3	4	4

Это сопоставление показывает, что при $n=5$ введение иррациональных резольвент на самом деле снижает число параметров. В случаях $n=6, 7, 9$ числа s, определенные с разных концов, повидимому, дают для числа параметров точные значения. Наконец, случай $n=8$ требует дополнительного исследования.

В заключение упомянем о двух основных вопросах, стоящих на очереди при решении рассматриваемой проблемы:

1) Вопрос об иррациональных резольвентах. Мы только что видели, что введение иррациональностей в область коэффициентов уравнения может существенным образом понизить число параметров в резольвенте. Эти иррациональности должны быть введены так, чтобы критические многообразия не все оставались неприводимыми. При этом пространства U и V будут находиться в алгебраической, но не в рациональной зависимости. Пусть координаты $v_1, v_2, \ldots, v_s$ пространства V определяются из уравнений

$$\varphi^i(u_1, u_2, \ldots, u_m, v_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Считая областью рациональности совокупность рациональных функций от $u_1, u_2, \ldots, u_m$, найдем примитивный элемент

$$\xi = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_s v_s$$

поля, образованного элементами $u_1, \ldots, u_m$; $v_1, \ldots, v_s$. Пусть

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m, \xi) = 0. \qquad (26)$$

Назовем пространством W поверхность, образованную координатами $u_1, u_2, \ldots, u_m, \xi$, которые подчинены уравнению (26). Координаты пространств U и V рационально выражаются через координаты пространства W. Группами инерции обоих уравнений (16), (17) мы будем считать совокупности подстановок, испытываемых их корнями при обходах бесконечно малых замкнутых путей в пространстве W. Последним в пространствах U, V могут соответствовать или простые, или повторенные по нескольку раз замкнутые пути. Задача состоит в построении такого пространства W, чтобы благодаря повторению замкнутых путей в U и V группы инерции, соответствующие различным критическим многообразиям, пришли к совпадению.

2) Вопрос о верхней границе для числа параметров в резольвенте. Если дано пространство U параметров уравнения (16), в котором критические многообразия образуют цепи длины $\leqslant s$, то возникает вопрос о возможности построения s-параметрической резольвенты. Если U_s — высшее критическое многообразие пространства U, то в пространстве V ему должно соответствовать критическое многообразие нулевого измерения. Это указывает путь к фактическому построению резольвент. Вопрос требует дальнейших исследований.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
24. II. 1943

ЛИТЕРАТУРА

1 Hilbert D., Mathematische Probleme. Problem 13, Gött. Nachr., 1900, 253—297; Ges. Abh., 3, 290—329.

2 Hilbert D., Ueber die Gleichung neunten Grades, Math. Ann., 97 (1927), 243—250; Ges. Abh., 2, 393—400.

3 Klein F., Ges. math. Abh., 2, 255—504.

4 Чеботарев Н., Основы теории Галуа, I, ОНТИ, 1934.

5 Tschebotaröw N., Ueber das Klein-Hilbertsche Resolventenproblem, Изв. Казанск. физ.-мат. общ. (3), 7 (1934), 5—22.

6 van der Waerden B. L., Moderne Algebra, 2, Springer, 1931.

7 Wiman A., Ueber die Anwendung der Tschirnhausen-Transformation auf die Reduktion algebraischer Gleichungen, Nova Acta R. Soc. Sc. Upsal., vol. e. o. e. (1927), 3—8.

N. G. TSCHEBOTARÖW. THE PROBLEM OF RESOLVENTS AND CRITICAL MANIFOLDS

SUMMARY

This paper is devoted to the problem of resolvents which has been proposed by F. Klein (3) and considerably advanced by D. Hilbert(1,2). It consists in the finding such a rational transformation of the given equation whose coefficients depend on a number of variable parameters, that the coefficients of the transformed equation include as few as possible variable parameters. Klein required that the coefficients of the transformation were either rational or depending on given irrationalities. Hilbert supposed, they depend, on the roots of auxiliary equations which likewise admit resolvents with a small number of parameters.

In this paper a new method of investigation of resolvents is introduced. This method is based on the construction of higher critical manifolds in the spaces whose coordinates are the parameters of the given equation. By a higher critical manifold U_S in the parameter space U we mean the totality of its points which correspond to equations, whose roots coincide according to the table

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = \ldots = x_{\mu_1}, \\ x_{\mu_1+1} = \ldots = x_{\mu_2}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{\mu_{k-1}+1} = \ldots = x_n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$S = (x_1, \ldots, x_{\mu_1})(x_{\mu_1+1}, \ldots, x_{\mu_2}) \ldots (x_{\mu_{k-1}+1}, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

being a permutation of the Galois group (monodromy group) of the given equation. A permutation T is denoted to be higher than a permutation $S\,(T > S)$, if the table of roots coincidences which corresponds to S is a sequence of the table, which corresponds to T. If a chain of higher critical manifolds

$$U_{S_1} \supset U_{S_2} \supset \ldots \supset U_{S_q},$$

where

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_q,$$

is contained in U, each birational transformation of the given equation retains the connection between the terms of this chain. Since the dimensions of the manifolds of this chain form a decreasing sequence, the number of parameters of any transformed equation cannot be less than q. This gives a lower limit for the number of parameters of any resolvent.

In § 1 a method of construction of higher critical manifolds is described. We form the expression

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{S \subset G} (t_1 x_{\alpha_1} + t_2 x_{\alpha_2} + \ldots + t_n x_{\alpha_n}),$$

where

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ are the new independent variables, and G is the Galois group of the given equation. If (2) holds, we put in Φ:

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \ldots + t_{\mu_1} &= 0, \\ t_{\mu_1+1} + \ldots + t_{\mu_2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_{\mu_{k-1}+1} + \ldots + t_n &= 0, \end{aligned}$$

and thus we obtain the expression Φ_S whose coefficients in t_i are zero, if and only if the parameters correspond to a point of U which lies on U_S.

In § 2 the inertia group of a point P of U is investigated, i. e. the number of permutations which the roots undergo when the parameters run closed paths in a neighbourhood of P. If the coefficients of the equation include the parameters linearly, then the inertia group consists of permutations which correspond to all the critical manifolds on which P lies.

In § 3 many formulations of the problem of resolvents (that of Klein, Hilbert and mine) are discussed and compared.

In § 4 the connection mentioned above between a lower limit of

the number s of parameters of a resolvent and the number of the terms of a chain, of increasing critical manifolds is stated. As an example the general equation of degree n with the alternating Galois group is considered. A lower limit of s is

$$s = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

The comparison with an upper limit of s obtained by Hilbert ([2]) gives.

n	5	6	7	8	9
s(Hilbert's)	1	2	3	4	4
s (mine)	2	2	3	3	4

The number $s=1$ in the case $n=5$ corresponds to irrational resolvents which are considered in this paper.

I hope that this method can be also applied to the finding of an upper limit of s.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 147—166 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено акад. **А. Н. Колмогоровым***)*

В работе изучается уравнение $x-\lambda A(x)=y$, где x, y—элементы пространства Банаха и A—линейный оператор. В частности, даются необходимые и достаточные условия, при которых для этого уравнения имеет место теория Рисса—Шаудера, являющаяся обобщением известной теории Фредгольма в абстрактном пространстве.

§ 1

Известная теория Ф. Рисса ([1]) уравнения

$$f=T(\varphi)=\varphi-\lambda U(\varphi),$$

где U и T — линейные операторы, а f и φ — элементы пространства (C) непрерывных функций, представляющая собой обобщение теории Фредгольма, в дальнейшем получила дополнения и обобщения. Эти обобщения шли по двум путям. С одной стороны, пространство (C) заменялось общим абстрактным пространством Банаха ([2]), с другой — на оператор U (вполне непрерывный в теории Рисса) или на T налагались менее ограничительные условия.

Так, Schauder ([3]) дополнил и видоизменил теорию Рисса, перенеся ее на пространство типа (B) и вводя в нее сопряженное уравнение.

J. Radon ([4]), исходя из пространства (C) (с умножением на комплексные числа), определил в комплексной плоскости значений λ для произвольного линейного оператора круг наибольшего радиуса с центром в точке $\lambda=0$, внутри которого имеет место теория Рисса.

Далее, в моей работе ([5]) было показано*, что теория Рисса—Шаудера остается в силе, если вместо полной непрерывности оператора U предполагать только, что его некоторая n-ая итерация U^n вполне непрерывна.

Наконец, K. Yosida ([7]) показал, что эта теория сохраняет силу для значений λ, удовлетворяющих неравенству $\lambda|<1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ доста-

* См. также ([6]).

точно мало, если только при некотором n оператор U^n может быть аппроксимирован вполне непрерывным оператором V так, что

$$\|U^n - V\| < 1.$$

В предлагаемой работе мною даются необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять оператор T, чтобы теория Рисса—Шаудера имела место.

В сущности я развиваю и с некоторой точки зрения завершаю идеи Радона. При этом в основу этой работы положено нормированное линейное пространство, отличающееся от пространства типа (B) лишь тем, что в нем введено умножение элементов на *комплексные* числа. Замечу еще, что Radon при изложении своей теории существенным образом основывался на возможности аппроксимации (по норме операторов) с любой степенью точности произвольного вполне непрерывного оператора, заданного в пространстве (C), конечномерным оператором. Легко доказать, что такая аппроксимация всегда осуществима в пространстве типа (B), имеющем базу. Но, повидимому, в настоящее время еще не известно, осуществима ли она, если не предполагать в пространстве уществования базы. В моем изложении подобного рода ограничения а пространство не налагаются.

Мы будем в этой работе называть пространством R пространство, отличающееся от пространства типа (B) лишь тем, что в нем определено умножение элементов $x, y, \ldots$ на комплексные числа $\alpha, \beta, \ldots$ При этом норма элемента удовлетворяет равенству*

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|.$$

Предложения, известные для пространства типа (B), на которые мы будем ссылаться, легко переносятся на пространство рассматриваемого вида**.

Сопряженное и второе сопряженное к R пространства обозначим соответственно через $\overline{R}$ и $\overline{\overline{R}}$.

Мы будем здесь рассматривать линейные операторы $U, A, \ldots$, отображающие R в его часть, и им сопряженные операторы $\overline{U}, \overline{A}, \ldots, \overline{\overline{U}}, \overline{\overline{A}}, \ldots$, определенные соответственно в $\overline{R}$ и $\overline{\overline{R}}$.

Линейный оператор U мы будем называть обратимым, если он взаимно однозначно отображает R само на себя. В этом случае в силу полноты R существует обратный линейный (непрерывный) оператор U^{-1} [см. Hausdorff (9), теорема VI], для которого

$$UU^{-1} = U^{-1}U = E,$$

где E обозначает и будет обозначать в дальнейшем тождественный оператор.

* Знаки $\| \; \|$ и $| \; |$ обозначают соответственно норму элемента и модуль числа.

** Единственным нетривиальным предложением является предложение о продолжении линейного функционала. Доказательство см. (8).

Линейный оператор K называется **конечномерным**, если он отображает R в подпространство конечного числа измерений.

Такой оператор всегда можно представить в виде

$$K(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k,$$

где f_k и x_k — соответственно линейные функционалы, определенные в R, и элементы R.

Все полученные в этой работе результаты остаются верными и для пространства типа (B). Мы ввели пространство R только потому, что изложение части работы, касающейся свойств резольвенты, носит в этом случае более естественный характер.

§ 2

Пусть T — линейный оператор, отображающий R в его часть. В этом параграфе мы доказываем теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения* $1^\circ - 6^\circ$ *эквивалентны друг другу:*

1° (α) *Однородные уравнения*

$$T(x) = 0, \quad \overline{T}(\overline{X}) = 0 \tag{2.1}$$

имеют одинаковое конечное наибольшее число линейно независимых решений и (β) *оператор* T *является нормально разрешимым, т. е. неоднородное уравнение* $y = T(x)$ *имеет решение для всякого* $y \in R$, *для которого удовлетворяется равенство* $X(y) = 0$, *каков бы ни был линейный функционал* X, *являющийся решением уравнения* $\overline{T}(X) = 0$.

2° (α) *Однородные уравнения* (2.1) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений и* (β) *оператор* $\overline{T}$ *является нормально разрешимым, т. е. неоднородное уравнение* $Y = \overline{T}(X)$ *имеет решение для всякого* $Y \in \overline{R}$, *для которого удовлетворяется равенство* $Y(x) = 0$, *каков бы ни был элемент* $x \in R$, *являющийся решением уравнения* $T(x) = 0$.

3° *Оператор* T *можно представить в виде суммы линейных операторов (отображающих* R *в его часть)*

$$T = B + V,$$

из которых B *обратимый, а* V *вполне непрерывный.*

4° *Оператор* T *можно представить в виде суммы линейных операторов*

$$T = B + K,$$

из которых B *обратимый, а* K *конечномерный.*

5° *Оператор* $\overline{T}$ *можно представить в виде суммы линейных операторов (отображающих* $\overline{R}$ *в его часть)*

$$\overline{T} = B^* + V^*,$$

из которых B^* *обратимый, а* V^* *вполне непрерывный.*

6° *Оператор* $\bar{T}$ *можно представить в виде суммы линейных операторов*

$$\bar{T} = B^* + K^*,$$

из которых B^* *обратимый, а* K^* *конечномерный**.

При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующими предложениями Хаусдорфа и имеющими место для произвольного линейного оператора U, отображающего пространство R само в себя ([9]):

I. Оператор U обратим, т. е. имеет непрерывный обратный оператор, если он отображает R само на себя взаимно однозначно.

II. Следующие свойства оператора U эквивалентны:

a) нормальная разрешимость U,

b) нормальная разрешимость $\bar{U}$,

c) замкнутость образа U в R,

d) замкнутость образа $\bar{U}$ в $\bar{R}$.

Эквивалентность свойств 1° и 2° является следствием эквивалентности свойств a) и b) предложения II.

Свойство 1° влечет за собой 4°. Заметим прежде всего, что из 1° (β) следует в силу предложения II замкнутость образа Γ оператора T.

Если Γ совпадает с R, то из 1° (α) следует, что уравнение $T(x) = 0$ имеет только нулевое решение и оператор T по предложению I обратим.

Пусть теперь $\Gamma \neq R$. Тогда из 1° (α) следует существование линейно независимых систем элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $X_1, X_2, \ldots, X_n$, соответственно принадлежащих к R и $\bar{R}$, удовлетворяющих (2.1) и притом таких, что каждый элемент x (соотв. X), удовлетворяющий (2.1), есть линейная комбинация из x_i (соотв. X_i).

Вследствие линейной независимости функционалов, образующих вторую систему, в R можно определить систему элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих равенствам**

$$X_i(y_k) = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Линейное пространство Γ_1 линейных комбинаций $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$ пересекается с Γ только в нулевом элементе, потому что, если $\sigma \in \Gamma$, то $\alpha_i = X_i(\sigma) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда следует, что элемент $x \in R$ может

---

* Операторы B^*, V^*, K^* не обязательно должны быть сопряженными к некоторым операторам.

** Это обстоятельство очевидно для $n = 1$ и может быть доказано затем для любого n по индукции.

быть представлен в виде суммы $x=v+v'$, где $v\in\Gamma$ и $v'\in\Gamma_1$, единственным образом.

Множество L всех элементов вида $v+v'$, где $v\in\Gamma$, $v'\in\Gamma_1$, совпадает с R. Действительно, L замкнуто, потому что Γ замкнуто, а Γ_1 конечномерно [см. ([1]), лемма 6], и, если предположить, что $R-L$ не пусто, нашлись бы линейный функционал φ, определенный в R, и элемент $y_0\in R-L$ такие, что $\varphi(y_0)=1$ и $\varphi(x)=0$ для $x\in L$. В частности, $\varphi(y_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Но это невозможно, так как тогда $\overline{T}(\varphi)=0$, и функционал φ был бы линейной комбинацией из X_k. Таким образом, каждый элемент $y\in R$ единственным образом представим в виде суммы $y=v+v'$, где $v\in\Gamma$, $v'\in\Gamma_1$.

Определим теперь линейные функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ такие, что

$$f_i(x_k)=\delta_{ik},$$

и обозначим через F_1 линейное замкнутое подпространство R, на котором эти функционалы равны нулю. Пусть еще F обозначает линейное замкнутое подпространство, на котором T равно нулю; оно представляет собой совокупность линейных комбинаций из x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Всякий элемент $x\in R$, очевидно, может быть единственным образом представлен в виде суммы $x=u+u'$, где $u\in F$ и $u'\in F_1$. При этом

$$u=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k.$$

Кроме того, для всякого $v\in\Gamma$ найдется единственный элемент $u'\in F_1$, удовлетворяющий уравнению $v=T(u')$.

Покажем теперь, что оператор

$$T_1(x)=T(x)+\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, y_k=T(x)+K(x)$$

обратим. Пусть $y\in R$; его можно единственным образом представить в виде

$$y=v+v', \quad v\in\Gamma, \quad v'\in\Gamma',$$

где, вследствие линейной независимости элементов y_k, в свою очередь, имеет место единственное представление

$$v'=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k.$$

Тогда элемент

$$x=u'+\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

где $u'\in F_1$ и $T(u')=v$, есть решение уравнения $y=T_1(x)$ и притом единственное.

Тем самым, принимая во внимание полноту пространства R и предложение Хаусдорфа, доказано существование и непрерывность оператора T_1^{-1}, и мы получим 4°, если положим $B = T_1$, $V = -K$.

Из свойства 3° следует 4° и наоборот. Вторая часть утверждения очевидна; докажем первую. Если линейный оператор T обладает свойством 3°, то

$$T = B + V = B(E + V_1), \quad V_1 = B^{-1}V, \tag{2.2}$$

где V_1 — линейный вполне непрерывный оператор. Но на основании известного результата Ф. Рисса ([10])

$$E + V_1 = B_1 + K_1,$$

где B_1 — обратимый, а K_1 — конечномерный операторы, и

$$T = B_2 + K_2, \quad B_2 = BB_1, \quad K_2 = BK_1,$$

где также B_2 — обратимый, а K_2 — конечномерный операторы.

Из свойства 3° следует 1°. В самом деле, образ оператора $E + V_1$, где V_1 — вполне непрерывный линейный оператор, как известно [([2]), стр. 151], есть замкнутое линейное подпространство R, и в таком случае из (2.2) следует, вследствие обратимости оператора B, что этим же свойством обладает образ T. Таким образом, имея в виду предложение II, мы получаем 1° (β). Далее, из равенства (2.2) следует еще, что линейные подпространства, которые T и $E + V_1$ отображают в нулевой элемент, совпадают.

Легко видеть также, что из равенства

$$\overline{T} = (\overline{E + V_1})\,\overline{B},$$

вследствие обратимости оператора $\overline{B}$ [([2]), стр. 148, теорема 4.1] следует, что линейные подпространства $\overline{R}$, которые $\overline{T}$ и $\overline{E + V_1}$ отображают в нулевой элемент $\overline{R}$, имеют одинаковое число измерений. Но для оператора $E + V_1$ утверждение 1° (α) справедливо [([2]), стр. 154], следовательно, оно справедливо и для T.

Из свойства 4° следует 6°, а из 6° следует 5°. Первое утверждение является следствием того обстоятельства, что оператор, сопряженный к обратимому или конечномерному оператору, также соответственно обратим или конечномерен. Второе утверждение тривиально.

Для дальнейшего нам понадобится

ЛЕММА. *Если образ L некоторого линейного оператора U, отображающего пространство R в него же, есть замкнутое подпространство и если существует система элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такая, что любой элемент $x \in R$ единственным образом представляется в виде*

$$x = g + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k, \quad g \in L,$$

то максимальное количество линейно независимых линейных функционалов X, *для которых* $\overline{U}(X)=0$, *равно* n.

Доказательство. Определим n линейных функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в R так, чтобы выполнялись условия

$$f_i(g)=0 \quad \text{для всех } g \in L,$$
$$f_i(y_k)=\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

что всегда возможно, так как линейные подпространства L_i, представляющие собой совокупности элементов вида

$$g+\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k y_k+\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k y_k \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

замкнуты, а y_i не принадлежат L_i. Функционалы f_i линейно независимы между собой и удовлетворяют равенствам $\overline{U}(f_i)=0$. Пусть теперь f—линейный функционал такой, что $\overline{U}(f)=0$, тогда $f(g)=0$ для всех $g \in L$, и пусть S—линейное подпространство $\overline{R}$, представляющее собой совокупность линейных комбинаций из f_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Наше утверждение будет доказано, если будет установлено, что $f \in S$. Если бы это было не так, то нашелся бы в R элемент z такой, что $f(z)=1$ и $f_i(z)=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Представим z в виде

$$z=g_0+\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k,$$

откуда

$$f_i(z)=\alpha_i=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и $z=g_0$. Тогда

$$f(z)=f(g_0)=0.$$

и мы приходим к противоречию.

Свойство 5° влечет 1°. В самом деле, из 5° следует вследствие уже доказанной эквивалентности 1° и 3°, что для оператора $\overline{T}$, рассматриваемого как исходный оператор и заданного в исходном пространстве $\overline{R}$, имеет место 1°.

Из 1° (β) для $\overline{T}$ следует, согласно предложению II, замкнутость образа $\overline{T}$, что, в силу того же предложения, влечет нормальную разрешимость оператора T [свойство 1° (β)].

Обозначим через μ_0, μ_1, μ_2, соответственно, максимальные количества линейно независимых элементов, отображаемых в нулевые элементы операторами T, $\overline{T}$ и $\overline{\overline{T}}$. Свойство 1° (α), примененное к $\overline{T}$, выражает, что μ_1 и μ_2 конечны и $\mu_1=\mu_2$. Нам предстоит показать, что $\mu_0=\mu_2$, откуда будет следовать, что $\mu_0=\mu_1$, и этим будет установлена справедливость свойства 1° (α) для T.

Из нормальной разрешимости оператора T следует, согласно предложению II, нормальная разрешимость оператора $\overline{T}$ [условие 2° (β)]. Таким образом, образ Γ^* оператора $\overline{T}$ представляет собой совокупность всех линейных функционалов, равных нулю на F, где F попрежнему множество элементов x, на которых $T(x)=0$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu_0}$ — базис F и $f_1, f_2, \ldots, f_{\mu_0}$ — система линейных функционалов, удовлетворяющих равенствам

$$f_{ik}(x_k)=\delta_{ik} \ (i, \ k=1, 2, \ldots, \mu_0),$$

и f — произвольный линейный функционал из $\overline{R}$. Разность

$$\varphi=f-\sum_{k=1}^{\mu_0} f(x_k) f_k$$

есть, очевидно, линейный функционал, принадлежащий Γ^*, так как он равен нулю на F. Таким образом, всякий линейный функционал $f \in \overline{R}$ представим в виде

$$f=\varphi+\sum_{k=1}^{\mu_0} \alpha_k f_k,$$

где $\varphi \in \Gamma^*$, и это представление, очевидно, единственно. Отсюда, на основании леммы (применяя ее к $\overline{R}$ и $\overline{T}$), $\mu_2=\mu_0$.

Этим теорема, сформулированная в начале параграфа, доказана.

§ 3

Пусть A — линейный оператор, отображающий пространство R в его часть, и λ — комплексное число. Введем в рассмотрение оператор T_λ, определяемый равенством

$$T_\lambda=E-\lambda A, \tag{3.1}$$

где E — тождественный оператор. Назовем *областью Фредгольма* оператора A множество Φ_A всех значений λ комплексной плоскости, для которых оператор T_λ может быть представлен в виде суммы обратимого и вполне непрерывного операторов или — что эквивалентно — в виде суммы обратимого и конечномерного операторов (см. § 2).

Φ_A есть открытое множество, так как, если $\lambda_0 \in \Phi_A$ и $E-\lambda_0 A=B+V$, где B — обратимый V — вполне непрерывный операторы, то $E-\lambda A= =[B-(\lambda-\lambda_0)A]+V=B_1+V$, где оператор B_1 — обратим; как только $|\lambda-\lambda_0| \, \|A\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$.

Область Φ_A характеризуется тем, что для значений λ, принадлежащих к Φ_A, и только для них имеют место следующие предложения, составляющие известную теорию Рисса—Шаудера в абстрактном линейном пространстве.

I. *Для того чтобы уравнение*

$$y=T_\lambda(x) \tag{3.2}$$

[*соответственно,*

$$Y=\overline{T}_\lambda(X)] \tag{3.2'}$$

имело решение для всякого y (*соотв.* Y), *необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение*

$$T_\lambda(x)=0 \tag{3.3}$$

[*соответственно*

$$\overline{T}_\lambda(X)=0] \tag{3.3'}$$

имело только тривиальное решение.

II. *Однородные уравнения* (3.3) и (3.3′) *имеют равные конечные количества линейно независимых решений.*

III. *Для того чтобы уравнение* (3.2) [*соотв.* (3.2′)] *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* X (*соотв.* x), *удовлетворяющего* (3.3′) [*соотв.* (3.3)], *имело место равенство* $X(y)=0$ [*соотв.* $Y(x)=0$].

Эти предложения являются прямым следствием теоремы 1.

Область Φ_A представляет собой, вообще говоря, сумму конечного или счетного числа связных компонент. Перенумеруем и обозначим через M_1, M_2, . . . только те из этих компонент, которые содержат в себе хотя бы одно значение λ, при котором оператор T_λ обратим, и назовем область

$$M_A=\sum_k M_k$$

областью мероморфности оператора A. В силу того, что для точек $\Phi_A - M_A$ оператор T_λ необратим, на основании теоремы 1 все точки этого множества являются собственными значениями оператора, иначе говоря, для них однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Пусть еще G_A обозначает область всех значений λ, для которых оператор T_λ обратим — область регулярности A. Для значений $\lambda \in G_A$ можно определить резольвенту оператора A, иначе говоря, оператор A_λ такой, что

$$(E-\lambda A)^{-1}=E+\lambda A_\lambda.$$

Резольвента, рассматриваемая как функция параметра λ, обладает известными аналитическими свойствами ([10]). G_A — непустое множество, так как содержит $\lambda=0$. Докажем теорему, которая оправдывает название множества M_A.

ТЕОРЕМА 2. $M_A - G_A$ *есть изолированное* (*счетное*) *множество значений* λ, *которое можно еще определить как совокупность собственных значений оператора* A, *принадлежащих области* M_A.

Каждое значение $\lambda_0 \in M_A - G_A$ *есть полюс резольвенты* A_λ, *иначе говоря, в достаточно малой окрестности* λ_0 *имеет место разложение* A_λ *в ряд*

$$A_\lambda = \frac{c_{-m}}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) + \ldots, \tag{3.4}$$

сходящийся по норме операторов. Среди операторов c_k $(k = -m, -m+1, \ldots)$ *операторы с отрицательными индексами конечномерны.*

Обратно, если в достаточно малой окрестности некоторого значения λ_0 *комплексной плоскости для резольвенты* A_λ *оператора* A *имеет место разложение* (3.4), *коэффициенты которого* c_k $(k = -m, -m+1, \ldots, -1)$ *являются конечномерными операторами, то* $\lambda_0 \in M_A - G_A$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in M_A - G_A$, тогда λ_0 принадлежит также некоторой компоненте M_{k_0} области M_A, содержащей в себе точку λ_1 такую, что оператор T_{λ_1} обратим. Соединим точки λ_0 и λ_1 кривой C, полностью принадлежащей к M_{k_0}. Возьмем произвольную точку λ' этой кривой. В силу того, что оператор $T_{\lambda'}$ представим в виде суммы обратимого и конечномерного операторов, оператор A можно представить в виде суммы $U + K$, где $E - \lambda' U$ обратим, а

$$K(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k.$$

При этом функционалы f_k и элементы x_k можно считать образующими линейно независимые системы.

Рассмотрим уравнение (3.2), которое можно переписать в виде

$$x - \lambda U(x) = y + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \tag{3.5}$$

где положено

$$a_k = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.6}$$

В силу того, что оператор $E - \lambda' U$ обратим, в плоскости комплексной переменной λ существует круг σ' с центром в λ', для всех точек которого оператор $E - \lambda U$ обратим, и U имеет резольвенту U_λ. Подвергая обе части (3.5) воздействию оператора $E + \lambda U_\lambda$, получим

$$x = y + \lambda U_\lambda(y) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k [x_k + \lambda U_\lambda(x_k)] \tag{3.7}$$

и, подставляя это выражение в (3.6), будем иметь систему из n линейных уравнений с n неизвестными a_k

$$a_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k f_i(x_k + \lambda U_\lambda(x_k)) = f_i(y + \lambda U_\lambda(y)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.8}$$

эквивалентную, в силу (3.6) и (3.7), исходному уравнению.

Отсюда решение этого уравнения имеет вид

$$x = y + \lambda \frac{D_\lambda(y)}{\Delta(\lambda)}, \tag{3.9}$$

где

$$D_\lambda(y) = \begin{vmatrix} c_{11}(\lambda) & \dots & c_{1n}(\lambda) & f_1(y + \lambda U_\lambda(y)) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) & f_n(y + \lambda U_\lambda(y)) \\ -x_1 - \lambda U_\lambda(x_1) & \dots & -x_n - \lambda U_\lambda(x_n) & U_\lambda(y) \end{vmatrix}, \tag{3.10}$$

$c_{ik}(\lambda) = \delta_{ik} - \lambda f_i(x_k + \lambda U_\lambda(x_k)) \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n), \qquad \Delta(\lambda) = |c_{ik}(\lambda)|.$

Определитель $\Delta(\lambda)$ системы есть аналитическая в круге σ' функция от λ, что вытекает из аналитических свойств U_λ.

Если в круге σ' имеется точка λ_*, для которой оператор T_{λ_*} обратим, то система (3.8) должна иметь при $\lambda = \lambda_*$ решение для любого $y \in R$. Но $y + \lambda_* U_{\lambda_*}(y)$ пробегает вместе с y все пространство R, и система чисел $b_i = f_i(y + \lambda_* U_{\lambda_*}(y))$ пробегает при этом, вследствие линейной независимости f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, всевозможные системы из n чисел.

Отсюда следует, что $\Delta(\lambda_*) \neq 0$. Таким образом, вследствие аналитичности $\Delta(\lambda)$, если только в круге σ' имеется точка, для которой оператор T_λ обратим, в нем, за исключением, быть может, изолированного множества значений, всюду $\Delta(\lambda) \neq 0$.

Но это обстоятельство заведомо имеет место в круге σ_1 с центром в точке λ_1. Покрывая теперь все точки кривой C соответствующими кругами σ (без границы) и применяя к этому покрытию лемму Бореля — Лебега, мы получим конечное число кругов σ, покрывающих C, и таких, что два соседних из них пересекаются по непустому открытому множеству. Теперь очевидно, что в круге σ_0 с центром в λ_0 также существует A_λ всюду, за исключением изолированного множества. Тем самым показано, что в достаточно малой окрестности точки λ_0 (исключая λ_0) резольвента

$$B_\lambda = \frac{D_\lambda}{\Delta(\lambda)}$$

существует. В точке же λ_0 определитель $\Delta(\lambda_0) = 0$, так как в противном случае в ней существовала бы резольвента и $\lambda_0 \in G_A$.

Далее справедливость разложения (3.4) легко усмотреть из строения определителя D_λ.

Что λ_0 есть собственное значение оператора A, следует из теоремы 1 и того обстоятельства, что оператор T_{λ_0} необратим.

Пусть теперь для резольвенты A_λ оператора имеет место в окрестности λ_0 разложение (3.4), где коэффициенты c_k $(k = -m, -m+1, \dots, -1)$ конечномерны, и пусть A'_λ и A''_λ — соответственно главная и регулярная части этого разложения. Положим

$$A' = A'_0, \quad A'' = A - A'.$$

Из теории Рисса [10] следует, что оператор $E-\lambda_0 A''$ обратим; непосредственно очевидно также, что A' конечный оператор.

Итак, $\lambda_0 \in \Phi_A$; но в достаточно малой окрестности λ_0 оператор T_λ обратим и потому $\lambda_0 \in M_A$.

При этом λ_0, очевидно, не принадлежит G_A, и вторая часть теоремы доказана.

Область M_A допускает еще другое определение, как это вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Область M_A представляет собой совокупность всех значений λ комплексной плоскости, для которых существует представление оператора A в виде суммы*

$$A = U + V$$

двух линейных операторов, обладающих такими свойствами:

a) *оператор $E-\lambda U$ обратим,*

b) *оператор V вполне непрерывный (или конечномерный),*

c) $UV = 0$ (*или* $VU = 0$).

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in M_A$, тогда либо $\lambda_0 \in G_A$ и теорема будет доказана, если положить в ней $U = A$ и $V = 0$, либо $\lambda_0 \in M_A - G_A$. Во втором случае по теореме 2 в достаточно малой окрестности λ_0 существует резольвента A_λ, которую можно представить в виде ряда (3.4). Обозначим через U значение главной части разложения (3.4) при $\lambda = 0$ и пусть $V = A - U$. Тогда, по теории Рисса [10], линейные операторы U и V будут удовлетворять условиям a), b), c) теоремы для $\lambda = \lambda_0$.

Наоборот, если линейные операторы U и V при $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяют условиям a), b), c) теоремы и $A = U + V$, то имеет место равенство

$$E - \lambda A = (E - \lambda U)(E - \lambda V)$$

[соотв. $$E - \lambda A = (E - \lambda V)(E - \lambda U)].$$

Отсюда, согласно теории Рисса, в достаточно малой окрестности λ_0 (за исключением, быть может, самого λ_0) существуют резольвенты A_λ, U_λ, V_λ операторов A, U, V, связанные между собой соотношением

$$E + \lambda A_\lambda = (E + \lambda V_\lambda)(E + \lambda U_\lambda)$$

[соотв. $$E + \lambda A_\lambda = (E + \lambda U_\lambda)(E + \lambda V_\lambda)].$$

Но резольвента V_λ (вполне непрерывного) оператора V разлагается в степенной ряд вида (3.4) (с $m \geqslant 0$), в то время как

$$U_\lambda = U_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) U_{\lambda_0^2} + \ldots$$

Отсюда легко следует возможность разложения A_λ в ряд вида (3.4) и, таким образом, по теореме 2, $\lambda_0 \in M_A$.

J. Radon [4] назвал радиусом Фредгольма оператора A число r_A, для которого выполняется следующее условие.

Представим A в виде $A=U+V$, где V — вполне непрерывный оператор. Пусть r — радиус сходимости (по норме операторов) ряда

$$E+\lambda U+\lambda^2U^2+\ \dots \tag{3.11}$$

Тогда r_A — точная верхняя грань всех r, соответствующих всевозможным таким представлениям оператора A.

Он показал при этом, что r_A есть радиус наибольшего круга с центром в нулевой точке комплексной λ-плоскости, всюду внутри которого справедливы предложения I — III, а также имеет место либо обратимость оператора T_λ, либо возможность разложения A_λ в виде (3.4). Это предложение Радона может быть получено на основании изложенной теории следующим образом. С одной стороны, сходимость ряда (3.11) влечет обратимость оператора $E-\lambda U$, откуда следует, что круг Фредгольма (без границ) полностью принадлежит M_A. С другой стороны, пусть $\lambda_0 < r' < r$, где r обозначает радиус наибольшего круга с центром в $\lambda=0$, содержащегося в M_A. В круге C_1 радиуса r' имеется конечное число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ оператора A, которым соответствуют главные части разложений резольвенты A_λ по степеням $\lambda-\lambda_i$ в окрестностях λ_i: $A_\lambda^{(1)}, A_\lambda^{(2)}, \dots, A_\lambda^{(m)}$. Оператор A теперь можно разложить на два оператора ([10])

$$A'=\sum_{k=1}^{m} A_0^{(k)}$$

и

$$A''=A-A'$$

из которых A' конечномерный, а A'' имеет резольвенту

$$A_\lambda''=A_\lambda-\sum_{k=1}^{m} A_\lambda^{(k)},$$

аналитическую в круге C_1 и, следовательно, ряд (3.11), в котором $U=A''$, сходится для всех λ с $|\lambda|<r'$, так как представляет собой разложение A_λ'' в окрестности $\lambda=0$.

Отсюда следует, что круг Фредгольма может быть определен еще как наибольший круг, содержащийся в M_A (или Φ_A).

Возникает вопрос, существует ли линейный оператор A, для которого M_A является существенной частью Φ_A.

Положительный ответ на него дает следующий пример.

Пример. Пусть последовательность элементов $x_i\,(i=1, 2, \dots)$ образует полную нормальную и ортогональную систему в гильберто-

вом пространстве. Определим в нем линейный оператор B и линейный функционал f следующим образом:

$$B(x_1) = x_2, \quad B(x_{2i+1}) = x_{2i-1}, \quad B(x_{2i}) = x_{2i+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$f(x_1) = 1, \qquad f(x_i) = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

Оператор B, очевидно, обратим и имеет норму, равную единице. Из этого следует, что для $|\mu| < 1$ оператор $E - \mu B$ имеет обратный оператор

$$(E - \mu B)^{-1} = E + \mu B_\mu = E + \mu B + \mu^2 B^2 + \ldots$$

Кроме того,

$$f(B^k(x_1)) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому уравнение

$$x - \mu B(x) - f(x)\, x_1 = 0$$

имеет для всякого μ с $|\mu| < 1$ нетривиальное решение $x_1 + \mu B_\mu(x_1)$ и оператор $E - \mu B - f x_1$ для рассматриваемых μ необратим.

Положим теперь

$$\mu = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}, \qquad B_* = B^{-1}, \qquad K(x) = f(x)\, B_*(x_1).$$

Тогда оператор

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} B_*(E - \mu B - f x_1) = E - \lambda A, \qquad A = \frac{E - (B_* - K)}{\lambda_0},$$

для значений λ, достаточно близких к λ_0, также необратим, а при $\lambda = \lambda_0$ обращается в $B_* - K$, где B_* — обратимый, а K — конечномерный операторы.

§ 4

ТЕОРЕМА 4. *Радиусы Фредгольма r_A и r_{A^n} линейного оператора A и его n-ой итерации A^n связаны соотношением*

$$r_{A^n} = (r_A)^n.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как и в случае обычных степенных рядов, радиус ρ сходимости ряда

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots,$$

где a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — линейные операторы, определяется при помощи равенства

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\| a_k \|}}.$$

Вследствие определения r_A существует для всякого $\varepsilon > 0$ разложение $A = U + V$ оператора A на вполне непрерывный оператор V и оператор U такой, что ряд (3.11) для некоторого λ, где $|\lambda| > r_A - \varepsilon$, сходится.

Отсюда следует, что

$$r_A - \varepsilon < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\| U^k \|}}$$

$$(r_A - \varepsilon)^n < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\| U^{nk} \|}}. \tag{4.1}$$

Оператор A^n можно представить в виде

$$A^n = U^n + nU^{n-1}V + \ldots = U^n + V_1,$$

где V_1 — вполне непрерывный оператор. При этом из (4.1) следует, что радиус сходимости ряда (3.11), где $U = A^n$, больше, чем $(r_A - \varepsilon)^n$ для всякого $\varepsilon > 0$.

Отсюда

$$r_{A^n} \geqslant (r_A)^n. \tag{4.2}$$

Заметим теперь, что если A, B и C — линейные операторы и

$$C = AB = BA,$$

то из обратимости C следует обратимость A и B. Действительно, из $C = AB$ следует, что образ A совпадает с R, а из $C = BA$ — что уравнение $A(x) = 0$ имеет только тривиальное решение. Так же можно рассуждать для B.

Пусть теперь λ — один из корней n-ой степени из μ. Из равенств

$$E - \mu A^n = E - \lambda^n A^n = (E - \lambda A)(E + \lambda A + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1}) =$$
$$= (E + \lambda A + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1})(E - \lambda A) \tag{4.3}$$

следует, что если оператор $E - \mu A^n$ обратим, то оператор $E - \lambda A$ также обратим, и так как первый оператор обратим для всех μ с $|\mu| < r_{A^n}$, за исключением изолированного (счетного) множества, то второй оператор обратим для всех λ с $|\lambda| < (r_{A^n})^{\frac{1}{n}}$ с тем же исключением. Из (4.3) следует еще для $\mu \in G_{A^n}$ и $\lambda = \sqrt[n]{\mu}$

$$E + \lambda A_\lambda = (E + \lambda A + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1})(E + \lambda^n A^{(n)}_{\lambda^n}) =$$
$$= (E + \lambda^n A^{(n)}_{\lambda^n})(E + \lambda A + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1}),$$

где $A_\mu^{(n)}$ — резольвента оператора A^n. Но для всех собственных значений μ_0 оператора A^n с $|\mu_0| < r_{A^n}$ имеет место в окрестности μ_0 разложение $A_\mu^{(n)}$ вида (3.4). В таком случае то же имеет место для всех собственных значений λ_0 оператора A с $|\lambda_0| < (r_{A^n})^{\frac{1}{n}}$. Отсюда

$$r_{A^n} \leqslant (r_A)^n. \tag{4.4}$$

Сопоставляя (4.2) и (4.4), получим

$$r_{A^n} = (r_A)^n.$$

Следствие 1. *Если некоторая n-ая итерация A линейного оператора A есть вполне непрерывный оператор, то* $r_A = \infty$.

Действительно, в этом случае, на основании теорем Рисса — Шаудера, $r_{A^n} = \infty$, что влечет $r_A = \infty$.

Это—полученный мною ранее результат ([5]).

Следствие 2. *Если для линейного оператора A существует такое целое число n и вполне непрерывный линейный оператор V, что*

$$\| A^n - V \| < 1,$$

то $r_A > 1$.

Действительно, в этом случае оператор A^n представляется в виде

$$A^n = B + V,$$

где $\| B \| < 1$, и, следовательно, ряд (3.11), где $U = B$, сходится в круге с центром $\lambda = 0$ радиуса, большего единицы. Таким образом, $r_{A^n} > 1$, что влечет $r_A > 1$. Это—результат K. Yosida ([7]).

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило 31. VIII. 1942

ЛИТЕРАТУРА

[1] Riesz F., Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math., **41** (1918), 71—98. Русск. пер. см. «Успехи матем. наук», в. 1 (1936), 175—199.

[2] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[3] Schauder J., Über lineare vollstetige Funktionaloperationen, Studia Mathem., II (1930), 183—196.

[4] Radon J., Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, **128** (1919), 1083—1121. Русск. пер. см. «Успехи матем. наук», вып. 1, 200—227.

[5] Никольский С., Линейные уравнения в метрическом пространстве, ДАН, 2 (XI) (1936), 309—312;
[6] Nagumo M., Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Räumen, Japan. J. of Math., 13 (1937), 75—80.
[7] Yosida K., Quasi-completely-continuous linear functional operations, Collected Papers fr. the Faculty of Science, Osaka, Imp. University, Ser. A. math., 7, 1939 (1940), 297—301.
[8] Сухомлинов Г. А., О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве, Мат. сб., 3 (45) (1938), 353—358.
[9] Hausdorff F., Zur Theorie der linearen Räume, J. f. reine u. angew. Math., 167 (1932), 294—311. Русск. пер. см. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, 266—290.
[10] Riesz F., Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913, 116—121.

S. NIKOLSKY. LINEAR EQUATIONS IN NORMED LINEAR SPACES

SUMMARY

Let R be a normed linear space (of Banach's type) in which the multiplication of the elements by complex numbers is defined. Let $\overline{R}$ denote the adjoint space.

In § 2 we prove the following theorem relating to the operator T that maps R into itself and the adjoint operator $\overline{T}$:

THEOREM 1. *The following assertions* $1^\circ - 6^\circ$ *are equivalent*

1° (α) *The homogeneous equations*

$$T(x)=0, \qquad \overline{T}(X)=0, \tag{1}$$

where $x \in R$, $X \in \overline{R}$, *possess the same (finite) maximal number of linearly independent solutions and* (β) *the operator* T *is normally solvable, i. e. the equation* $y=T(x)$ *is solvable for any* $y \in R$ *such that* $X(y)=0$, *whenever the linear functional* X *is a solution of the equation* $\overline{T}(X)=0$.

2° (α) *The homogeneous equations* (1) *possess the same (finite) maximal number of linearly independent solutions and* (β) *the operator* $\overline{T}$ *is normally solvable, i. e. the equation* $Y=\overline{T}(X)$ *is solvable for any* $Y \in \overline{R}$ *such that* $Y(x)=0$, *whenever* x *is a solution of the equation* $T(x)=0$.

3° *The operator* T *may be represented as the sum of linear operators (that map* R *into itself)*

$$T=B+V,$$

where the operator B *possesses the inverse and* V *is completely continuous.*

4° *The operator T may be represented as the sum of linear operators*

$$T = B + K,$$

where B possesses the inverse and K is finite-dimensional.

5° *The operator $\overline{T}$ may be represented as the sum of linear operators (that map $\overline{R}$ into itself)*

$$\overline{T} = B^* + V^*,$$

where B^* possesses the inverse and V^* is completely continuous.

6° *The operator $\overline{T}$ may be represented as the sum of linear operators*

$$T = B^* + K^*,$$

where B^* possesses the inverse and K^* is finite-dimensional.

In § 3 we consider the equation

$$y = T_\lambda(x) = x - \lambda A(x),$$

where $x \in R$, $y \in R$ and A is an arbitrary linear operator that maps R into itself, as well as the adjoint equation

$$Y = \overline{T}_\lambda(X),$$

where $X \in \overline{R}$, $Y \in \overline{R}$.

The totality Φ_A of such λ, for which T_λ is representable as the sum of a linear operator possessing the inverse and a completely continuous linear operator forms a domain in the complex λ-plane that will be called the Fredholm domain of the operator A.

In virtue of Theorem 1 the following assertions constituting the well known Riesz—Schauder theory are true for all λ belonging to Φ_λ and only for them:

I. *The necessary and sufficient condition for the equation*

$$y = T_\lambda(x) \tag{2}$$

[*resp. the equation*

$$Y = \overline{T}_\lambda(X)] \tag{2'}$$

to be solvable for any y (resp. Y) is that the homogeneous equation

$$T_\lambda(x) = 0. \tag{3}$$

[*resp.*

$$\overline{T_\lambda}(X)=0] \qquad (3')$$

have but the trivial solution.

II. *The homogeneous equation* (3) *and* (3′) *have the same finite number of linearly independent solutions.*

III. *Equation* (2) [*resp.* (2′)] *is solvable if and only if* $X(y)=0$ [*resp.* $Y(x)=0$] *for any* X (*resp.* x) *satisfying* (3′) [*resp.* (3)].

The domain Φ_A is, in general, the sum of an enumerable set of connected components. Let $M_1, M_2, \ldots$ be those of the components that contain at least one λ, for which T_λ possesses the inverse. The domain $M_A=\sum_k M_k$ will be called the domain of meromorphicity of the operator A. M_A is contained in Φ_A but does not, in general, coincide with it.

Let, finally, G_A denote the set of such λ, for which T_λ possesses the inverse — the domain of regularity of the operator A. If $\lambda \in G_A$, then there exists the resolvent of the operator A, i. e. such an operator A_λ that

$$(E-\lambda A)^{-1}=E+\lambda A_\lambda.$$

In view of Theorem 1 every λ belonging to $\Phi_A - M_A$ is an *eigen*-value of the operator A.

We further have

THEOREM 2. *$M_A - G_A$ is an isolated (enumerable) set that may also be defined as the totality of all eigen-values of the operator A belonging to the domain M_A.*

Every $\lambda_0 \in M_A - G_A$ is a pole of the resolvent A_λ. In other words, in a sufficiently small neighbourhood of λ_0 the resolvent admits the expansion of the form

$$A_\lambda=\frac{c_{-m}}{(\lambda-\lambda_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{\lambda-\lambda_0}+$$
$$+c_0+c_1(\lambda-\lambda_0)+\ldots, \quad m>0, \qquad (4)$$

converging with respect to the norm of operators. The operators c_k with negative indices are finite-dimensional.

Conversely, if the expansion (4) *of the resolvent with finite-dimensional c_k $(k=-m, -m+1, \ldots, -1)$ is valid in a sufficiently small neighbourhood of λ_0 in the complex plane, then $\lambda_0 \in M_A - G_A$.*

The following theorem proved in § 3 yields another definition of the domain M_A.

THEOREM 3. *The domain M_A in the complex plane is the set of those λ, for which A is representable in the form*

$$A=U+V,$$

where U and V are linear operators with the properties:

a) *$E-\lambda U$ possesses the inverse,*

b) *V is completely continuous (or finite-dimensional),*

c) *$UV=0$ (or $VU=0$).*

The radius r_A of the largest circle with the centre at the null point of the λ-plane that is contained in M_A (or in Φ_A) will be called the Fredholm radius of the operator A.

In § 4 we prove

THEOREM 4. *The Fredholm radii r_A and r_{A^n} of the operators A and A^n are connected by the relation*

$$r_{A^n}=(r_A)^n.$$

From this theorem follow the corollaries:

Corollary 1. *If for the operator A an iterated operator A^n is completely continuous, then $r_A=\infty$.*

This is one of our earlier results (5).

Corollary 2. *If for the linear operator A there exist an integer n and a completely continuous linear operator V such that*

$$\| A^n-V \| < 1,$$

then $r_A > 1$.

There arethe results obtained by K. Yosida (7).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1943), 167—184 Série mathématique

А. Я. ХИНЧИН

ОБ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Обычная для классической механики постановка эргодической проблемы, стремящаяся показать достаточно плотное заполнение «поверхности постоянной энергии» отдельными траекториями, в квантовой механике уже из априорных соображений не может иметь успеха. Напротив, более элементарный метод, базирующийся на малой колеблемости важнейших физических величин, характеризующих состояние молекулярной системы при данном значении суммарной энергии, может быть проведен в квантовой механике с таким же успехом, как в классической. В статье этот метод проводится в деталях для схемы Максвелла-Больцманна.

§ 1. Постановка задачи

Под именем эргодической проблемы в статистической механике обычно понимают задачу теоретического обоснования замены временных средних различных физически важных функций состояния системы их средними значениями, взятыми по фазовому пространству или надлежаще выбранной его части. Хорошо известно, что только достаточная принципиальная обоснованность этой замены может дать методам статистической механики теоретическое оправдание. Всякое предложение, утверждающее правомерность такой замены при тех или других специальных условиях, называют эргодической теоремой, если оно доказывается, и эргодической (иногда квази- или псевдоэргодической) гипотезой, если оно вводится в качестве предположения.

В классической механике положение эргодической проблемы в настоящее время может считаться более или менее выясненным. Правда, относительно необходимой природы эргодических теорем и даже самой постановки задачи имеется несколько резко контрастирующих между собою воззрений; однако воззрения эти выявлены и формулированы с почти исчерпывающей точностью, и на каждом из предложенных путей исследования наука продвинулась в основном до предела, полагаемого современными средствами математического анализа. Такому уяснению логической ситуации в значительной мере способствовали открытая в 1931 г. эргодическая теорема Биркхоффа и ряд вызванных ею работ по общей динамике.

С переходом к квантовой механике положение, однако, очень существенным образом меняется. Основную роль в этом изменении ситуации играют, повидимому, три следующих новых момента: 1) В квантовой механике, в отличие от классической, наиболее точное описание состояния системы дают нам, вообще говоря, не определенные значения свя-

занных с нею физических величин, а лишь законы распределения их. 2) В состояниях с точно заданным значением энергии изолированная система, согласно законам квантовой механики, не претерпевает никаких изменений; это находит себе выражение в том, что законы распределения всех связанных с такой системой величин остаются неизменными во времени. 3) В квантовой механике наряду с так называемой статистикой Максвелла-Больцманна (M.-B.) не меньшую роль играют «новые статистики»: Бозе-Эйнштейна (B.-E.) и Ферми-Дирака (F.-D.), требующие новых методов расчета и не имеющих себе аналогов в классической механике *.

С точки зрения статистической механики момент 1) вызывает лишь некоторое усложнение методов расчета более технического, чем принципиального значения. Напротив, моменты 2) и 3) знаменуют собою радикальное изменение всей постановки эргодической проблемы. На этом мы должны здесь остановиться несколько подробнее.

Что касается момента 3), то, как известно, переход к «новым статистикам» связан с существенной редукцией того многообразия в пространстве возможных состояний системы, по которому производится осреднение. Элементами этого пространства служат члены некоторой полной нормированной ортогональной системы собственных функций (элементов гильбертова пространства) и их линейные комбинации. При точно фиксированном значении $\mathcal{E}$ энергии данной системы в статистике M.-B. допускаются и признаются равноправными все собственные функции оператора энергии, принадлежащие к собственному значению $\mathcal{E}$. В статистике B.-E. мы ограничиваемся рассмотрением симметрических, а в статистике F.-D. антисимметрических, относительно любой пары частиц, собственных функций, тем самым существенно редуцируя многообразие, по элементам которого должно производиться осреднение. Эта редукция вполне аналогична той, к которой мы приходим в классической механике, когда кроме интеграла энергии нам приходится учитывать фиксированное значение еще какого-нибудь интеграла движения (например, одной из компонент вектора количества движения); различие состоит лишь в том, что по своей геометрической картине редукция к симметрическим или антисимметрическим функциям в квантовой механике несравненно сложнее упомянутых редукций классической механики, что, естественно, вызывает соответствующее значительное усложнение математического исследования, а также существенное отличие результатов этого исследования от того, что дает схема M.-B.

По поводу момента 2), существенное значение которого как одной из важнейших черт, отличающих квантовую механику от классической, как нам кажется, обычно недостаточно подчеркивается, заметим прежде всего, что он непосредственно вытекает из уравнения Шредингера, определяющего эволюцию данной системы во времени. В самом деле,

---

* Мы не упоминаем здесь об изменениях, вытекающих из того факта, что в квантовой механике, в отличие от классической, мы часто имеем дело с дискретной статистикой вместо непрерывной; эти изменения касаются в основном лишь формального аппарата и не затрагивают существа дела.

согласно этому уравнению система, находившаяся в начальный момент в состоянии ψ_0, в котором ее энергия имеет точное значение $\mathcal{E}$, в момент t будет находиться в состоянии

$$\psi_t = e^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}\psi_0,$$

где h—постоянная Планка. Если $\mathfrak{A}$ — физическая величина, характеризуемая эрмитовским оператором A, и если вообще (φ, ψ) означает скалярное произведение векторов φ и ψ гильбертова пространства, то математическое ожидание величины $\mathfrak{A}$ в состоянии ψ_t равно, как известно,

$$(A\psi_t, \psi_t) = (Ae^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}\psi_0, e^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}\psi_0) = (e^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}A\psi_0, e^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}\psi_0) =$$
$$e^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}e^{-\frac{2\pi i}{h}\mathcal{E}t}(A\psi_0, \psi_0) = (A\psi_0, \psi_0),$$

т. е. равно математическому ожиданию той же величины в начальном состоянии ψ_0, и, следовательно, не меняется с течением времени. Таким образом вся статистика состояния ψ_t остается неизменной, т. е. неизменным остается с точки зрения квантовой механики само это состояние.

С точки зрения классической механики этот факт является парадоксальным. Рассмотрим, например, движение материальной частицы по прямой линии в отсутствии действующих сил. При точно фиксированной энергии скорость частицы будет точно фиксированной. Если эта скорость отлична от нуля, то частица непрерывно меняет положение, и с точки зрения классической механики абсцисса ее непрерывно изменяется. Но с точки зрения квантовой механики точно фиксированная скорость исключает возможность точной фиксации абсциссы; для последней мы имеем лишь вероятностный закон распределения, и притом, если скорость фиксирована точно, этот закон есть закон равномерного распределения вдоль всей бесконечной прямой, и действительно с течением времени остается неизменным; разумеется, положение немедленно и радикальным образом меняется, если мы допустим в определении энергии (и скорости) хотя бы небольшую дисперсию.

Для эргодической проблемы рассматриваемый нами факт имеет основоположное значение. В классической механике система, энергия которой точно фиксирована, описывает в своей эволюции в фазовом пространстве некоторую траекторию, принадлежащую определенной поверхности Σ постоянной энергии. На этом своем пути система проходит через различные области поверхности Σ, в которых связанные с данной системой физические величины имеют, вообще говоря, весьма различные значения. Эргодическая теория стремится показать, что временная средняя какой-либо физической величины вдоль такой траектории, вообще говоря, не может быть сильно отлична от ее среднего значения, взятого по всей данной поверхности постоянной энергии. Обычно представляют себе дело так, что траектория, как правило, густо покрывает собою всю эту поверхность, заполняет ее всюду плотно, вследствие чего временные средние вдоль траектории

и становятся близкими к фазовым средним, взятым по всей поверхности.

Мы видим, насколько иначе обстоит дело в квантовой механике. Здесь траектория охватывает собою лишь такие точки пространства состояний, которые физически ничем не отличаются от исходной точки. В другие области «поверхности» постоянной энергии, где физические величины имеют другие законы распределения, она вообще не заходит. Отсюда ясно, что ни о какой «эргодичности» в смысле классической механики здесь не может быть и речи. Временные средние данной физической величины (конечно, о «временных средних» здесь стоит говорить лишь ради сохранения аналогии, на самом деле ничего во времени не меняется) будут, вообще говоря, весьма различны для различных траекторий и не будут иметь ничего общего с «микроканоническими» (т. е. взятыми по всей «поверхности») осреднениями.

Все эти факты в той или иной степени уже давно известны, и мы знаем целый ряд попыток выхода из создающегося таким образом затруднения. Чаще всего стараются преодолеть эти трудности, допуская, что энергия системы определена не с полною точностью, а лишь в пределах некоторого малого интервала $(\mathscr{E}, \mathscr{E}+\Delta\mathscr{E})$. В классической механике такая замена произвела бы впечатление неуклюжей тривиальности, ибо ясно, что речь шла бы лишь об изменении математического языка, внешности изложения, при незатронутой сущности. Но в квантовой механике эта замена имеет большое принципиальное значение, так как, сколь бы мало ни было $\Delta\mathscr{E}$, в новой постановке задачи состояние системы (ее статистика) будет уже меняться с течением времени. Но даже независимо от того, что такая замена с обычной ссылкой на «неизбежную неточность наших измерений» очень неприятна в идейном отношении, заставляя объективное явление носить на себе печать несовершенства наших исследовательских методов *,—даже независимо от этого, такая замена, как показывает простой расчет, не приводит к желаемой цели, ибо, хотя при этом состояние системы начинает претерпевать реальные физические изменения, каждая траектория все же не может выйти из некоторой весьма узкой области «поверхности» постоянной энергии, вследствие чего средние значения физических величин, взятые вдоль такой траектории, резко отличаются, вообще говоря, от микроканонических средних (Шредингер, И. Нейманн).

Можно, следуя И. Нейманну([1]), итти дальше и принципиально заменить точное измерение всех физических величин приближенным («макроскопическим») их измерением. И. Нейманну удалось действительно построить математическую теорию таких приближенных измерений и в ее обстановке доказать ряд предложений, имеющих целью по меньшей мере

* Релятивистская квантовая механика может, правда, в этом пункте стать на вполне объективную позицию, указав, что точное значение энергии системы объективно связано с полной неопределенностью того момента времени, к которому мы это значение относим, что должно вызвать очевидные и трудно преодолимые усложнения.

сделать правдоподобным положительное решение эргодической проблемы. Однако, не говоря уже о совершенно своеобразном понимании И. Нейманном самой этой проблемы, весь этот путь, разумеется, вызывает указанные нами выше сомнения идейного порядка в еще гораздо большей степени, чем простая замена точного значения энергии интервалом $(\mathcal{E}, \mathcal{E}+\Delta\mathcal{E})$.

Существуют между тем некоторые вполне элементарные соображения, в основе своей известные уже основоположникам физической статистики и позволяющие теоретически обосновать методы статистической механики без специфических эргодических теорем или гипотез, точнее говоря, без исследования расположения отдельных траекторий системы на соответствующей поверхности постоянной энергии. В основе этих соображений лежит следующая простая и естественная идея. Исследование характера отдельных траекторий становится действительно необходимым, если мы хотим обосновать законность замены осреднений вдоль траектории осреднениями по более широким многообразиям для любой функции состояния системы; для ряда вопросов общей динамики столь широкая постановка задачи может действительно оказаться желательной; однако для специальных целей физической статистики мы можем ограничить наши исследования функциями, наиболее употребительными в этой области, если такое ограничение окажется способным облегчить и упростить само исследование. Давно и хорошо известно, что значительное большинство важнейших для физической статистики функций состояния системы имеет некоторую специфическую черту: такая функция, как правило, на каждой поверхности постоянной энергии принимает значения, которые всюду, за исключением множества весьма малой меры, близки к некоторому постоянному для данной поверхности числу. Без всяких вычислений ясно, что для такой функции «эргодичность» легко может быть обоснована: средние значения вдоль большинства траекторий будут близки к микроканоническому (т. е. взятому по всей поверхности постоянной энергии) среднему. Этот особый характер основных физических функций имеет своей причиной тот факт, что в условиях, когда мы можем пренебречь в первом приближении взаимодействием между составляющими данную систему элементарными частицами, такая функция является, как правило, суммой физических величин, каждая из которых зависит от состояния только какой-нибудь одной из этих частиц (такие функции мы в дальнейшем будем называть «сумматорными»); так как число составляющих данную систему элементарных частиц бывает, как правило, весьма велико, и состояния этих частиц связаны между собою лишь весьма слабой стохастической зависимостью (сводящейся к требованию, чтобы точка, описывающая состояние системы, принадлежала данной поверхности постоянной энергии или другому достаточно широкому многообразию), то при исследовании закона распределения такой сумматорной функции на данном многообразии вступает в силу *закон больших чисел*, который и делает исследуемую функцию «почти постоянной» на данном многообразии. Математическая теория имеет, конечно, своей

целью подвести возможно точную количественную базу под эти чисто качественные соображения.

Для нашей цели весьма интересен тот факт, что все только что приведенные соображения имеют силу в одинаковой степени как для классической, так и для квантовой механики, что создает возможность удовлетворительного теоретического обоснования методов статистической механики в области квантовой физики. Настоящая работа имеет целью наметить необходимые для этого рассуждения и расчеты для случая схемы Максвелла-Больцманна. В дальнейшем мы предполагаем провести аналогичные рассмотрения и для «новых статистик».

§ 2. Редукция к микроканонической корреляции

Если, как мы предполагаем, в начальный момент времени измерение дало для величины энергии изучаемой системы точное значение $\mathcal{E}$, то система в этот момент находится в состоянии, характеризуемом одной из собственных функций оператора энергии, принадлежащих к собственному значению $\mathcal{E}$. Это собственное значение в случае системы, состоящей из большого числа частиц (а мы в дальнейшем всегда будем иметь дело только с такими системами), будет весьма многократно вырожденным, так что к нему будет принадлежать линейное замкнутое многообразие $\mathfrak{M}$ собственных функций весьма большого (хотя и конечного, как правило) числа измерений s. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_s$ — полная нормированная ортогональная система (в данный момент произвольная) элементов этого многообразия. Тогда многообразие $\mathfrak{M}$ есть совокупность собственных функций вида

$$U = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k U_k,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ — комплексные числа, связанные соотношением

$$\sum_{k=1}^{s} |\gamma_k|^2 = 1. \tag{1}$$

Это многообразие $\mathfrak{M}$ служит, очевидно, для квантовой механики аналогом «поверхности» постоянной энергии. Математически оно, разумеется, равноправно с комплексной сферой (1) в комплексном евклидовом пространстве s измерений. Для последующих осреднений по многообразию $\mathfrak{M}$ мы вводим на этом многообразии [или, что то же, на сфере (1)] простейшую «натуральную» метрику: элемент объема в пространстве модулей $|\gamma_1|, |\gamma_2|, \ldots, |\gamma_s|$ принимаем пропорциональным величине соответствующей «площадки» вещественной сферы [точнее, сферического сектора $|\gamma_k| \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant s$] (1), а фазы предполагаем равномерно распределенными, независимо друг от друга и от модулей, в отрезке $(0, 2\pi)$. Нормировку выбираем наиболее естественную для вероятностных расчетов, полагая равной единице меру всей комплексной сферы (1). Если обозначить через d_0 элемент объема комплексной сферы (1) в только что определенной натуральной метрике, то микро-

каноническим средним любой функции $f(U)$ состояния системы по определению будет величина

$$\int f(U)\,do = \int f\left(\sum_{k=1}^{s} \gamma_k U_k\right) do,$$

где интеграл должен быть распространен на всю сферу (1). Легко показать, что эта величина равна

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} f(U_k). \tag{2}$$

Это, с одной стороны, доказывает независимость средних значений физических функций от выбранной ортогональной системы, а с другой, — дает нам возможность при всех расчетах с микроканоническими средними обойтись без интеграций, пользуясь только конечными суммами вида (2).

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — любая связанная с данной системой физическая величина и A — соответствующий ей эрмитовский оператор. Как известно, математическое ожидание $E_U(\mathfrak{A})$ величины $\mathfrak{A}$ в состоянии U равно скалярному произведению (AU, U). В силу сделанного выше общего замечания микроканоническое среднее этих математических ожиданий равно

$$\alpha = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} (AU_k, U_k).$$

Обозначим через $P_n(U)$ вероятность неравенства

$$|\mathfrak{A} - \alpha| > \varepsilon n$$

в состоянии U, причем n — число составляющих данную систему элементарных частиц, а ε — произвольное положительное число, и через M_ε — множество тех элементов U многообразия $\mathfrak{M}$, для которых

$$P_n(U) > \varepsilon;$$

пусть, наконец, mM означает меру множества M элементов многообразия $\mathfrak{M}$ в принятом нами натуральном мероопределении. Очевидно, мы имеем

$$\int_{\mathfrak{M}} P_n(U)\,do \geqslant \varepsilon m M_\varepsilon,$$

откуда

$$mM_\varepsilon \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathfrak{M}} P_n(U)\,do;$$

а так как в силу неравенства Чебышева

$$P_n(U) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} E_U(\mathfrak{A} - \alpha)^2,$$

то

$$mM_\varepsilon \leqslant \frac{1}{\varepsilon^3 n^2}\int_{\mathfrak{M}} E_U(\mathfrak{A} - \alpha)^2 do = \frac{1}{\varepsilon^3 n^2 s}\sum_{k=1}^{s} ([A - \alpha]^2 U_k, U_k),$$

причем последнее равенство будет частным случаем общей формулы (2) для микроканонических средних. Поэтому, если нам удастся показать, что при постоянном ε и неограниченно возрастающем n

$$D\mathfrak{A} = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}([A-\alpha]^2 U_k, U_k) = o(n^2), \tag{3}$$

то тем самым будет показано, что мера множества M_ε становится при достаточно большом числе элементарных частиц как угодно малой; это же означает, что для подавляющего большинства состояний U, принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}$, мы можем с вероятностью, превосходящей $1-\varepsilon$, ожидать выполнения неравенства

$$|\mathfrak{A}-\alpha| \leqslant \varepsilon n.$$

Для сумматорных функций $\mathfrak{A}$ микроканоническое среднее α будет величиной порядка n; таким образом полученный результат показывает, ввиду произвольной малости ε, что для подавляющего большинства элементов многообразия $\mathfrak{M}$ значение величины $\mathfrak{A}$ с подавляющей вероятностью отличается от своего микроканонического среднего α лишь на величину, как угодно малую в сравнении с самим этим средним.

Но это и есть то, чего в этой элементарной постановке задачи мы старались достигнуть. В отличие от точной эргодической теории мы здесь не стремимся (и не имеем возможности) показать, что состояния наблюдаемых нами в действительности систем одинаково часто будут принадлежать двум любым областям многообразия $\mathfrak{M}$, имеющим одинаковую меру (равномерное распределение). Напротив, при нашей постановке задачи нисколько не мешало бы требуемому выводу, если бы реальный закон распределения встречаемых в природе систем был отличен от равномерного, и даже если бы он был различным в различных условиях. Важно лишь, чтобы он был абсолютно непрерывным, т. е. чтобы была малой вероятность (статистически — относительная частота) попадания состояния системы на данное множество малой меры. В остальном эта статистика может быть совершенно произвольной, — во всех случаях мы будем получать для величины $\mathfrak{A}$ с подавляющей относительной частотой значения, близкие к ее микроканоническому среднему α, что и решает в положительном смысле эргодическую проблему.

Таким образом, в этой элементарной постановке задача сводится к доказательству соотношения (3). Для целей дальнейшего заметим еще, что весь развитый нами до сих пор формальный аппарат в одинаковой мере применим к трем важнейшим для квантовой физики статистическим схемам М.-В., В.-Е. и F.-D. С другой стороны, мы не делали до сих пор никаких предположений относительно величины $\mathfrak{A}$, в частности не постулировали ее сумматорного характера.

Допустим теперь, что изучаемая нами система G состоит из большого числа n элементарных частиц $g_1, \ldots, g_n$, взаимным потенциалом которых мы можем пренеберечь, так что энергия $\mathcal{E}$ системы G есть

сумма энергий ε_i составляющих ее частиц g_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Пусть, кроме того, величина $\mathfrak{A}$, как это имеет место для большинства физических величин статистической механики, представляется в виде суммы

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i,$$

где величина $\mathfrak{A}_i$ зависит только от состояния частицы $g_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$; если A_i—эрмитовский оператор, соответствующий величине $\mathfrak{A}_i$, и α_{ki} — математическое ожидание этой величины в состоянии U_k, то

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

$$\alpha_{ki} = (A_i U_k, U_k),$$

$$\alpha = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}.$$

Полагая

$$\alpha_i = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki}$$

(микроканоническое среднее математического ожидания величины $\mathfrak{A}_i$), мы имеем

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Для левой части соотношения (3) мы, таким образом, находим выражение

$$D\mathfrak{A} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \left(\left[\sum_{i=1}^{n} (A_i - \alpha_i) \right]^2 U_k, U_k \right) =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{n} ([A_i - \alpha_i]^2 U_k, U_k) + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i \neq j} ([A_i - \alpha_i][A_j - \alpha_j] U_k, U_k).$$

Так как первое слагаемое правой части при безгранично возрастающем n есть бесконечно большая величина порядка не выше n, то соотношение (3) будет доказано, если нам удастся показать, что при $n \to \infty$ равномерно относительно $i, j\,(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ i \neq j)$

$$\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} ([A_i - \alpha_i][A_j - \alpha_j] U_k, U_k) = o(1). \tag{4}$$

В случае схемы Максвелла-Больцманна, которой мы исключительно будем заниматься в дальнейшем, система собственных функций $U_k\,(1 \leqslant k \leqslant s)$ может, как известно, быть выбрана в виде

$$U_k = \prod_{r=1}^{n} u_{kr} \quad (1 \leqslant k \leqslant s), \tag{5}$$

где u_{kr} — собственная функция оператора энергии частицы g_r, принадлежащая к некоторому собственному значению ε_{kr} этого оператора; при этом для получения всей системы функций U_k мы должны заставить каждую функцию u_{kr} пробегать некоторую полную нормированную ортогональную систему таких собственных функций, комбинируя между собою эти функции всевозможными способами, лишь бы для каждой комбинации осуществлялось соотношение

$$\sum_{r=1}^{n} \varepsilon_{kr} = \mathscr{E}.$$

Так как оператор $A_i - \alpha_i$ действует лишь на функцию u_{ki}, все же другие множители произведения (5) относительно него играют роль постоянных (именно это и есть формальное выражение нашего допущения, что величина $\mathfrak{A}_i$ зависит только от состояния частицы g_i), то мы имеем

$$(A_i - \alpha_i)\, U_k = \frac{U_k}{u_{ki}} (A_i - \alpha_i)\, u_{ki},$$

и далее

$$(A_i - \alpha_i)(A_j - \alpha_j)\, U_k = \frac{U_k}{u_{ki} u_{kj}} (A_i - \alpha_i)\, u_{ki} (A_j - \alpha_j)\, u_{kj}.$$

Отсюда следует, что

$$([A_i - \alpha_i][A_j - \alpha_j]\, U_k, U_k) =$$
$$= \left(\frac{U_k}{u_{ki} u_{kj}} [A_i - \alpha_i]\, u_{ki} [A_j - \alpha_j]\, u_{kj}, \quad \frac{U_k}{u_{ki} u_{kj}} u_{ki} u_{kj} \right) =^{*}$$
$$= \left(\frac{U_k}{u_{ki} u_{kj}}, \frac{U_k}{u_{ki} u_{kj}} \right) ([A_i - \alpha_i]\, u_{ki}, u_{ki}) ([A_j - \alpha_j]\, u_{kj}, u_{kj}) =$$
$$= 1 \cdot ([A_i - \alpha_i]\, U_k, U_k) ([A_j - \alpha_j]\, U_k, U_k) = (\alpha_{ki} - \alpha_i)(\alpha_{kj} - \alpha_j),$$

так что соотношение (4), которое нам надлежит доказать, приводится к виду

$$\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} (\alpha_{ki} - \alpha_i)(\alpha_{kj} - \alpha_j) = o\,(1). \tag{6}$$

В этом виде функции $\mathfrak{A}_i$ как случайные величины полностью элиминированы, вместо них мы имеем дело с их математическими ожиданиями α_{ki}, т. е. величинами, принимающими уже совершенно определенные значения в каждом состоянии системы. Таким образом здесь создалась уже ситуация, принципиально ничем не отличающаяся от того, что мы имеем в классической механике. Левая часть соотношения (6), которая может быть, очевидно, записана и в виде

$$\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \alpha_{kj} - \alpha_i \alpha_j,$$

---

* Вообще, если u_i и v_j — функции, относящиеся к двум различным системам, то

$$(u_1 v_1, u_2 v_2) = (u_1, u_2)(v_1, v_2).$$

Проще всего в этом убедиться, давая элементам u_i и v_j функциональную интерпретацию и выражая скалярные произведения в виде интегралов.

с точностью до не имеющего здесь никакого значения множителя, представляет собою микроканонический коэффициент корреляции величин α_{ki} и α_{kj}, нашей целью является показать, что при $n \to \infty$ этот коэффициент стремится к нулю равномерно относительно i и j $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n, i \neq j)$; более того, мы попытаемся найти для этого коэффициента простое асимптотическое выражение и тем самым, в частности, определить порядок его малости.

§ 3. Метод расчета для схемы Максвелла-Больцманна

1°. *Структурные функции и сопряженные законы распределения*

Условимся называть *структурной функцией* $\Omega(x)$ данной физической системы число линейно независимых собственных функций ее оператора энергии, принадлежащих к собственному значению x этого оператора. Мы допустим, что данная система имеет чистый точечный энергетический спектр, так что функция $\Omega(x)$ принимает отличные от нуля (и притом конечные) значения лишь для дискретного ряда значений x, которые мы можем считать неотрицательными, выбирая надлежащим образом произвольную постоянную в выражении потенциальной энергии. В обозначениях предыдущего параграфа мы имеем

$$\Omega(\mathscr{E}) = s.$$

Обозначим через $\omega_i(x)$ структурную функцию частицы g_i и через $\Omega_i(x)$ и $\Omega_{ij}(x)$ соответственно структурные функции систем $G - g_i$ и $G - g_i - g_j$.

Легко убедиться, что

$$\Omega(x) = \sum_y \Omega_i(x-y)\,\omega_i(y) = \sum_z \Omega_j(x-z)\,\omega_j(z) = \\ = \sum_{y,z} \Omega_{ij}(x-y-z)\,\omega_i(y)\,\omega_j(z), \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_i(x) &= \sum_z \Omega_{ij}(x-z)\,\omega_j(z), \\ \Omega_j(x) &= \sum_y \Omega_{ij}(x-y)\,\omega_i(y). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Условимся, далее, называть *ведущей функцией* системы G величину

$$\Phi(\alpha) = \sum_x e^{-\alpha x}\,\Omega(x),$$

причем ряд в правой части мы допустим сходящимся для всех $\alpha > 0$ (что в действительности имеет место для всех изучаемых в физике систем). Если $\sum_x \Omega(x) = +\infty$, то при любом $a > 0$

$$e^{a\alpha}\,\Phi(\alpha) \to \infty \quad (\alpha \to 0);$$

так как, далее,

$$e^{a\alpha}\,\Phi(\alpha) = e^{\frac{a}{2}\alpha} \sum e^{\left(\frac{a}{2}-x\right)\alpha}\,\Omega(x) \geqslant \\ \geqslant e^{\frac{a}{2}\alpha} \sum_{x<\frac{a}{2}} e^{\left(\frac{a}{2}-x\right)\alpha}\,\Omega(x);$$

то, обозначая через x_0 наименьшее возможное значение энергии данной системы, так что $\Omega(x_0) > 0$, мы будем иметь при $a > 2x_0$

$$e^{a\alpha}\Phi(\alpha) \to \infty \text{ и при } \alpha \to \infty.$$

С другой стороны, логарифм функции $e^{a\alpha}\Phi(\alpha)$ при любом $a > 0$ будет конвексной функцией от α, в чем легко убедиться двукратным дифференцированием и применением неравенства Шварца. Отсюда следует, что уравнение

$$\frac{d\lg(e^{a\alpha}\Phi(\alpha))}{d\alpha} = a + \frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = 0$$

имеет единственный положительный корень при $a \geqslant 2x_0$. Выбирая для a значение $\mathscr{E}$ полной энергии данной системы, обозначим этот единственный корень через ϑ, так что

$$\frac{\Phi'(\vartheta)}{\Phi(\vartheta)} + \mathscr{E} = 0. \tag{9}$$

Пусть далее $\Phi_i(\alpha)$, $\Phi_{ij}(\alpha)$, $\varphi_i(\alpha)$ означают соответственно ведущие функции систем $G - g_i$, $G - g_i - g_j$, g_i. Положим

$$\frac{1}{\Phi(\vartheta)} e^{-\vartheta x}\Omega(x) = W(x),$$

$$\frac{1}{\Phi_i(\vartheta)} e^{-\vartheta x}\Omega_i(x) = W_i(x),$$

$$\frac{1}{\Phi_{ij}(\vartheta)} e^{-\vartheta x}\Omega_{ij}(x) = W_{ij}(x),$$

$$\frac{1}{\varphi_i(\vartheta)} e^{-\vartheta x}\omega_i(x) = w_i(x),$$

причем значение параметра ϑ во всех этих формулах одно и то же, определяемое уравнением (9). Так как очевидно

$$\sum_x W(x) = 1,$$

то $W(x)$ представляет собою некоторый (в наших предположениях дискретный) закон распределения, который мы будем называть *сопряженным законом* системы G. Подобным же образом $W_i(x)$, $W_{ij}(x)$ и $w_i(x)$ соответственно являются сопряженными законами систем $G - g_i$, $G - g_i - g_j$ и g_i.

Структурные функции обратно выражаются через сопряженные законы посредством формулы

$$\Omega(x) = \Phi(\vartheta)e^{\vartheta x}W(x) \tag{10}$$

и аналогичных ей для $\Omega_i(x)$, $\Omega_{ij}(x)$ и $\omega_i(x)$.

Из законов композиции (7), (8) структурных функций непосредственно вытекают правила композиции соответствующих сопряженных законов на основании формул типа (10); в самом деле, мы имеем, например,

$$W(x) = \frac{e^{-\vartheta x}}{\Phi(\vartheta)}\Omega(x) =$$

$$= \frac{e^{-\vartheta x}}{\Phi(\vartheta)}\sum_y \Omega_i(x-y)\,\Omega_i(y) =$$

$$= \frac{e^{-\vartheta x}}{\Phi(\vartheta)}\sum_y \Phi_i(\vartheta)e^{\vartheta(x-y)}W_i(x-y)\,\varphi_i(\vartheta)e^{\vartheta y}w_i(y) =$$

$$= \sum_y W_i(x-y)\,w_i(y),$$

так как

$$\Phi(\vartheta) = \Phi_i(\vartheta)\varphi_i(\vartheta)$$

в силу известного вытекающего из (7) правила композиции преобразований Лапласа.

Таким образом сопряженные законы подчиняются правилу композиции законов распределения взаимно независимых случайных величин; этот факт может служить отправной точкой для редукции вывода асимптотических формул статистической механики к предельным теоремам теории вероятностей, что мы сделаем в основных чертах в пункте 3° настоящего параграфа.

В частности, мы имеем

$$\Omega(x) = \sum_{x_i} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i(x_i) \right\} \omega_n \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right),$$

где суммирование распространяется на все возможные значения величин x_i.

2°. *Точные формулы*

Пусть ψ_{ir} $(r = 1, 2, \ldots)$ — некоторая полная нормированная ортогональная система собственных функций оператора энергии частицы g_i. Очевидно, функции u_{ki}, которыми мы пользовались в § 2, могут быть выбраны так, чтобы каждая из них совпадала с одной из функций ψ_{ir}, при этом, конечно, для данных r и i мы, вообще говоря, будем иметь $u_{ki} = \psi_{ir}$ при весьма многих значениях k; нам важно теперь установить, сколько именно будет таких значений.

Пусть собственная функция ψ_{ir} принадлежит к собственному значению ε_{ir} оператора энергии частицы g_i (среди чисел ε_{ir} $(r = 1, 2, \ldots)$ могут быть, разумеется, и равные между собою). Тогда всякая функция U_k рассматривавшегося нами в § 2 типа, принадлежащая к собственному значению $\mathcal{E}$ и для которой $u_{ki} = \psi_{ir}$, может, очевидно, быть представлена в виде

$$U_k = \psi_{ir} U'_{ki}, \tag{11}$$

где U'_{ki} — собственная функция оператора энергии системы $G - g_i$, принадлежащая к собственному значению $\mathcal{E} - \varepsilon_{ir}$; и обратно, если U'_{ki} — такая функция, равенство (11) дает нам одну из функций ортогональной системы, которую мы рассматривали в § 2. Таким образом число функций U_k, для которых $u_{ki} = \psi_{ir}$, равно числу (линейно независимых) собственных функций оператора энергии системы $G - g_i$, принадлежащих к собственному значению $\mathcal{E} - \varepsilon_{ir}$, т. е. равно $\Omega_i(\mathcal{E} - \varepsilon_{ir})$.

Подобным же образом, число функций U_k, для которых $u_{ki} = \psi_{ir}$, $u_{kj} = \psi_{jt}$, равно $\Omega_{ij}(\mathcal{E} - \varepsilon_{ir} - \varepsilon_{jt})$.

Обозначим теперь через λ_{ir} математическое ожидание величины $\mathfrak{A}_i$ в состоянии, характеризуемом собственной функцией ψ_{ir}, т. е. положим

$$\lambda_{ir} = (A_i \psi_{ir}, \psi_{ir}).$$

Тогда, очевидно, $\alpha_{ki} = \lambda_{ir}$ для всякого k, для которого $u_{ki} = \psi_{ir}$, $\alpha_{ki}\alpha_{kj} = \lambda_{ir}\lambda_{jt}$ для всякого k, для которого $u_{ki} = \psi_{ir}$, $u_{kj} = \psi_{jt}$, а так как число

этих последних k равно, как мы только что выяснили, $\Omega_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt})$, то

$$\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\alpha_{kj}=\sum_{r}\sum_{t}\lambda_{ir}\lambda_{jt}\Omega_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt}).$$

Аналогично мы находим

$$\alpha_i=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}=\frac{1}{s}\sum_{r}\lambda_{ir}\Omega_i(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}),$$

$$\alpha_j=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{kj}=\frac{1}{s}\sum_{t}\lambda_{jt}\Omega_j(\mathcal{E}-\varepsilon_{jt}).$$

Замечая еще, что $s=\Omega(\mathcal{E})$, мы, таким образом, находим

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\alpha_{kj}-\alpha_i\alpha_j=$$

$$=\frac{1}{\Omega^2(\mathcal{E})}\sum_{r,t}\lambda_{ir}\lambda_{jt}\{\Omega(\mathcal{E})\Omega_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt})-\Omega_i(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir})\Omega(\mathcal{E}-\varepsilon_{jt})\};$$

в силу же формул (7) и (8) это равно

$$\frac{1}{\Omega^2(\mathcal{E})}\sum_{r,t}\lambda_{ir}\lambda_{jt}\sum_{y,z}\omega_i(y)\omega_j(z)\{\Omega_{ij}(\mathcal{E}-y-z)\Omega_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt})-$$
$$-\Omega_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-z)\Omega_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{jt}-y)\}.$$

Наконец, переход от структурных функций к сопряженным законам распределения дает в силу общей формулы (10)

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{h}\alpha_{ki}\alpha_{kj}-\alpha_i\alpha_j=$$

$$=\frac{1}{\Phi^2(\vartheta)e^{2\mathcal{E}\vartheta}W^2(\mathcal{E})}\sum_{r,t}\lambda_{ir}\lambda_{jt}\sum_{y,z}\varphi_i(\vartheta)e^{\vartheta y}w_i(y)\,\varphi_j(\vartheta)\,e^{\vartheta z}w_j(z)\times$$
$$\times\{\Phi_{ij}^2(\vartheta)\,e^{\vartheta(2\mathcal{E}-y-z-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt})}W_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{it})W_{ij}(\mathcal{E}-y-z)-$$
$$-\Phi_{ji}^2(\vartheta)\,e^{\vartheta(2\mathcal{E}-y-z-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt})}W_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-z)W_{ij}(\mathcal{E}-y-\varepsilon_{jt})\}=$$
$$=\frac{1}{W^2(\mathcal{E})}\sum_{r,t}\lambda_{ir}\lambda_{jt}\frac{e^{-\vartheta(\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt})}}{\varphi_i(\vartheta)\varphi_j(\vartheta)}\sum_{y,z}w_i(y)\,w_i(z)\times$$
$$\times\{W_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-\varepsilon_{jt})W_{ij}(\mathcal{E}-y-z)-$$
$$-W_{ij}(\mathcal{E}-\varepsilon_{ir}-z)W_{ij}(\mathcal{E}-y-\varepsilon_{jt})\}. \qquad (12)$$

Таково окончательное, удобное для наших целей выражение той величины, порядок малости которой при $n\to\infty$ мы хотим оценить.

3°. *Основы метода асимптотической оценки.*

Теперь мы кратко наметим путь, ведущий к получению асимптотической оценки выражения (12). Метод наш состоит в том, чтобы применить к оценке значений функции $W_{ij}(x)$ «центральную предельную теорему» теории вероятностей. Как мы уже знаем, $W_{ij}(x)$ есть закон распределения суммы $n-2$, т. е. очень большого числа случайных величин. Каждая из этих случайных величин связана с одной из частиц

нашей системы; поэтому в актуальных физических ситуациях эти случайные величины либо все имеют один и тот же закон распределения (однородное вещество), либо (в случае смеси) среди этих законов имеется лишь небольшое число (обычно 2—3) различных между собою; во всяком случае, мы имеем полное основание полагать, что важнейшие статистические характеристики этих $n-2$ случайных величин — их средние значения и дисперсии — являются величинами примерно одного и того же порядка, а этого достаточно, чтобы иметь основание считать закон распределения суммы таких случайных величин близким к закону Гаусса:

$$W_{ij}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} e^{-\frac{(x-A)^2}{2B}}, \tag{13}$$

где A — математическое ожидание и B — дисперсия закона $W_{ij}(x)$; мы не будем исследовать здесь ни дальнейших, более сложных условий справедливости этого приближенного равенства (связанных с арифметической природой законов распределения отдельных слагаемых), ни оценки связанной с этим равенством погрешности, откладывая все это до другого случая и стремясь ограничиться здесь принципиальной стороной дела; заметим только, что в обычных физических условиях (весьма большое число частиц одинаковой или немногих различных между собою структур) приближенное соотношение (13) для значений x, близких к A, имеет место с чрезвычайно большой точностью.

Заметим еще, что по определению закона $W_{ij}(x)$ мы имеем

$$A = \frac{1}{\Phi_{ij}(\vartheta)} \sum_x x e^{-\vartheta x} \Omega_{ij}(x) = -\frac{\Phi'_{ij}(\vartheta)}{\Phi_{ij}(\vartheta)}; \tag{14}$$

подобным же образом, для математического ожидания a_i закона $w_i(x)$ мы находим выражение

$$a_i = \frac{1}{\varphi_i(\vartheta)} \sum_x x e^{-\vartheta x} \omega_i(x) = -\frac{\varphi'_i(\vartheta)}{\varphi_i(\vartheta)}; \tag{15}$$

но

$$\Phi(\vartheta) = \Phi_{ij}(\vartheta)\varphi_i(\vartheta)\varphi_j(\vartheta),$$

откуда логарифмическим дифференцированием получаем

$$\frac{\Phi'(\vartheta)}{\Phi(\vartheta)} = \frac{\Phi'_{ij}(\vartheta)}{\Phi_{ij}(\vartheta)} + \frac{\varphi'_i(\vartheta)}{\varphi_i(\vartheta)} + \frac{\varphi'_j(\vartheta)}{\varphi_j(\vartheta)};$$

в силу (14), (15) и (9) это дает

$$A = \mathscr{E} - a_i - a_j. \tag{16}$$

Что касается величины B, то здесь мы заметим только, что, будучи суммою дисперсий $n-2$ взаимно независимых и примерно однотипно распределенных случайных величин, она необходимо является бесконечно большой порядка n (в случае однородного вещества она прямо пропорциональна $n-2$).

Наконец, заметим, что в силу формул (13) и (16) мы имеем также с хорошим, вообще говоря, приближением:

$$W(\mathcal{E}) = \sum_{y,z} w_i(y)\, w_j(z)\, W_{ij}(\mathcal{E} - y - z) \approx$$
$$\approx \sum_{y,z} w_i(y)\, w_j(z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi B}}\, e^{-\frac{(y-a_i)^2 + (z-a_j)^2}{2B}} \approx$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \sum_{y,z} w_i(y)\, w_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}}; \qquad (17)$$

мы здесь в порядке приближения заменили единицей показательный множитель, так как при не слишком больших y и z [именно, при y и $z = o(\sqrt{n})$] он почти не отличается от единицы, в то время как члены суммы, в которых y или z велико, исчезающе малы благодаря присутствию множителя $w_i(y)\, w_j(z)$.

С помощью формул (13) и (17) правая часть равенства (12) приводятся к виду

$$\sum_{r,t} \lambda_{ir}\lambda_{jt} \frac{e^{-\vartheta(\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt})}}{\varphi_i(\vartheta)\,\varphi_j(\vartheta)} \sum_{y,z} w_i(y)\, w_j(z) \times$$
$$\times \{e^{-\frac{1}{2B}[(y+z-a_i-a_j)^2 + (\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt}-a_i-a_j)^2]} -$$
$$- e^{-\frac{1}{2B}[(\varepsilon_{ir}+z-a_i-a_j)^2 + (y+\varepsilon_{jt}-a_i-a_j)^2]}\} \approx$$
$$\approx \sum_{r,t} \lambda_{ir}\lambda_{jt} \frac{e^{-\vartheta(\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt})}}{\varphi_i(\vartheta)\,\varphi_j(\vartheta)} \cdot \frac{1}{2B} \sum_{y,z} w_i(y)\, w_j(z) \times$$
$$\times \{-(y+z-a_i-a_j)^2 - (\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt}-a_i-a_j)^2 +$$
$$+ (\varepsilon_{ir}+z-a_i-a_j) + (y+\varepsilon_{jt}-a_i-a_j)^2\} =$$
$$= \sum_{r,t,y,z} \frac{1}{2B} \lambda_{ir}\lambda_{jt} \frac{e^{-\vartheta(\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt})}}{\varphi_i(\vartheta)\,\varphi_j(\vartheta)} w_i(y)\, w_j(z) \times$$
$$\times \{-2(y-a_i)(z-a_j) - 2(\varepsilon_{ir}-a_i)(\varepsilon_{jt}-a_j) +$$
$$+ 2(z-a_j)(\varepsilon_{ir}-a_i) + 2(y-a_i)(\varepsilon_{jt}-a_j)\} =$$
$$= -\frac{1}{B} \sum_{r,t,y,z} \lambda_{ir}\lambda_{jt} \frac{e^{-\vartheta(\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt})}}{\varphi_i(\vartheta)\,\varphi_j(\vartheta)} w_i(y)\, w_j(z)(y-\varepsilon_{ir})(z-\varepsilon_{jt}).$$

Замечая теперь, что

$$\sum_y y w_i(y) = a_i, \qquad \sum_z z w_j(z) = a_j,$$
$$\sum_y w_i(y) = \sum_z w_j(z) = 1,$$

мы приводим полученное выражение к виду

$$-\frac{1}{B} \sum_{r,t} \lambda_{ir}\lambda_{jt} (\varepsilon_{ir}-a_i)(\varepsilon_{jt}-a_j) \frac{e^{-\vartheta(\varepsilon_{ir}+\varepsilon_{jt})}}{\varphi_i(\vartheta)\,\varphi_j(\vartheta)} =$$
$$= -\frac{1}{B} \sum_r \lambda_{ir}(\varepsilon_{ir}-a_i) \frac{e^{-\vartheta\varepsilon_{ir}}}{\varphi_i(\vartheta)} \sum_t \lambda_{jt}(\varepsilon_{jt}-a_j) \frac{e^{-\vartheta\varepsilon_{jt}}}{\varphi_j(\vartheta)}.$$

Положим

$$\sum_r \lambda_{ir}(\varepsilon_{ir} - a_i)\frac{e^{-\vartheta\varepsilon_{ir}}}{\varphi_i(\vartheta)} = \rho_i \quad (\lambda \leqslant i \leqslant n).$$

Наш результат сводится тогда к тому, что при $n \to \infty$ величина, (12), т. е.

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki}\alpha_{kj} - \alpha_i\alpha_j,$$

асимптотически равна

$$-\frac{\rho_i\rho_j}{B}. \qquad (18)$$

Можно было бы показать, что ρ_i есть приближенное выражение микроканонического коэффициента корреляции величин λ_{ir} и ε_{ir} (относящихся к одной и той же молекуле). Однако в данный момент это для нас роли не играет; важно лишь то, что числители выражений (18) для различных i, j являются величинами одинакового порядка (в случае однородного вещества они просто все одинаковы). Мы видим, таким образом, что величина (12), к оценке которой мы свели нашу проблему, в физически актуальных случаях есть бесконечно малая порядка n^{-1} (в подавляющем большинстве реально изучаемых ситуаций она асимптотически пропорциональна n^{-1}). Этот результат дает, очевидно, значительно больше, чем требовало решение эргодической проблемы в принятой нами элементарной ее постановке.

Разумеется, для полного обоснования полученного результата все расчеты следует сопровождать оценкой погрешностей. Эти оценки приходится брать довольно детальными, ибо основной движущей причиной той интерференции, которая обусловливает собою малость величины (12), является взаимное уничтожение главных членов соответствующего выражения. Весь вопрос состоит поэтому в том, насколько малым в тех или других случаях будет остаточный член при применении центральной предельной теоремы. Разумеется, с вероятностной стороны во всех случаях все предпосылки для достаточной малости этого остаточного члена всегда оказываются выполненными (как и в классической механике); единственное, что требует специального разбора в каждом отдельном случае, это — чисто арифметические черты структурных функций $\omega_i(x)$, обусловленные, в свою очередь, арифметической природой энергетических спектров, составляющих данную систему частиц.

Мы должны еще напомнить, что все изложенное в § 1 и 2 в одинаковой мере относится ко всем статистическим схемам квантовой физики, и лишь расчетные методы для «новых статистик» должны строиться иначе. К этому вопросу мы еще надеемся вернуться.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
14 X 1942

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932.

A. KHINTCHINE. SUR LE PROBLÈME ERGODIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

RÉSUMÉ

Le problème ergodique est celui de donner une rectification théorique pour l'emploi des moyennes en phase (au lieu des moyennes temporaires) dans la mécanique statistique. Dans le cas de la mécanique classique on cherche d'habitude à se convaincre que les trajectoires d'un système physique compliqué dans l'espace des phases couvrent, en général, d'une façon assez dense la surface d'énergie constante qui correspond au phénomène étudié. Dans la mécanique quantique cette voie est irréalisable, les trajectoires étant assujetties à des domaines étroits de la multiplicité qui joue ici le rôle d'une telle surface. Or, on connaît dans la mécanique classique un autre procédé très élémentaire pour surmonter la difficulté: on montre que les quantités physiques qu'on étudie sont telles que leurs valeurs se groupent étroitement autour d'une valeur moyenne, sauf aux points d'un ensemble de mesure très petite. Dans l'article présent l'auteur établit que cette voie peut être poursuivie avec le même succès en mécanique quantique, au moins dans le cas de la statistique de Maxwell-Boltzmann; en effectuant les calculs assez soigneusement on parvient à des résultats aussi exacts qu'en mécanique classique.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 185–202 Série mathématique

А. Г. КУРОШ

ИЗОМОРФИЗМЫ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе выясняется теоретико-структурная природа некоторых теорем, касающихся прямых разложений групп, откуда, в частности, прямо следуют аналогичные теоремы для колец.

Введение

Вопрос об изоморфизме двух разложений группы в прямое произведение неразложимых множителей или, общее, о существовании изоморфных продолжений для двух любых прямых разложений группы играет в теории групп заметную роль. Общеизвестна основная теорема Ремака-Шмидта, утверждающая центральный изоморфизм двух любых прямых разложений с неразложимыми множителями группы, обладающей композиционным рядом. Эта теорема справедлива для любых операторных групп и остается пока самым общим результатом для групп с произвольной системой операторов. Для групп без операторов ее обобщали Курош, перенося на группы с обрывом убывающих нормальных цепочек, а затем Коржинек (1), доказавший существование центрально изоморфных продолжений для любых двух прямых разложений группы, если только центр этой группы удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек подгрупп. Теорема Коржинека справедлива и для операторных групп при условии, что всякая подгруппа центра допустима относительно данной системы операторов. В теореме Коржинека говорится о прямых разложениях с конечным числом множителей. Справедливость этой теоремы и для прямых разложений с бесконечным множеством множителей была показана Головиным (2); для этой цели он использовал, в частности, лемму о существовании общего продолжения для любых двух прямых разложений группы без центра. Головин доказал также, что если даны два таких прямых разложения произвольной группы, что при каждом из них центр группы остается целиком в одном из прямых множителей, то эти два разложения обладают центрально изоморфными продолжениями. Отметим, наконец, работы Фиттинга и Куроша (3) по вопросу об единственности прямого разложения группы и о существовании общего продолжения для двух данных прямых разложений.

В теории колец роль прямых произведений групп играют *двусторонние прямые суммы* колец. Вопрос об изоморфизме разложений кольца в прямую сумму попарно аннулирующихся двусторонних идеалов не подвергался пока детальному изучению, вероятно, ввиду теоремы, что

кольцо с единицей может обладать лишь единственным двусторонним прямым разложением с неразложимыми слагаемыми [4]. За пределами этой теоремы можно указать один результат Мори [5], для формулировки которого введем определения, необходимые и для дальнейшего.

Элемент a кольца R (не обязательно коммутативного или ассоциативного) называется полным делителем нуля, если при любом x из R имеют место равенства $ax = xa = 0$. Множество всех полных делителей нуля составляет в R двусторонний идеал, который будет обозначаться через $\mathfrak{N}$. Подкольца B и C кольца R называются $\mathfrak{N}$-изоморфными, если они изоморфны и если между ними можно установить такой изоморфизм φ, что из $c = \varphi(b)$, $b \subset B$, $c \subset C$, следует $c - b \subset \mathfrak{N}$. Наконец, два двусторонних прямых разложения кольца R называются $\mathfrak{N}$-изоморфными, если между слагаемыми этих двух разложений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие слагаемые будут $\mathfrak{N}$-изоморфными подкольцами.

В теореме Мори рассматриваются кольца, одновременно коммутативные и ассоциативные, в которых справедливо ослабленное условие минимальности, т. е. условие, что всякая бесконечная убывающая цепочка идеалов содержит в пересечении лишь нуль. Для таких колец теорема утверждает $\mathfrak{N}$-изоморфизм двух любых двусторонних прямых разложений с неразложимыми слагаемыми.

В действительности, однако, теория двусторонних прямых разложений колец может быть продвинута так же далеко, как и теория прямых разложений групп: *для всех указанных выше теоретико-групповых теорем справедливы параллельные им теоремы о двусторонних прямых разложениях колец, причем без предположений о коммутативности или ассоциативности умножения в этих кольцах; роль центра группы играет в этих теоремах идеал $\mathfrak{N}$, центральный изоморфизм заменяется $\mathfrak{N}$-изоморфизмом*. Доказательство этих теорем может быть достигнуто почти автоматическим перенесением доказательства соответствующих теоретико-групповых теорем.

Этот параллелизм двух теорий не может быть случайным, и его корни следует искать в теории структур. Перенесение в теорию структур теоремы Ремака-Шмидта было достигнуто Орэ [6]. В § 2—4 настоящей работы в теорию структур переносятся и другие указанные выше теоретико-групповые теоремы, кроме теоремы Коржинека, причем некоторые из этих теорем одновременно несколько усиливаются. Отсюда в § 5 выводятся в качестве следствий соответствующие теоремы для колец.

Определение и простейшие свойства структур будут дальше предполагаться известными [см., например, книгу Биркгофа [7] или главу 11 книги Куроша [8]]. Мы будем иметь дело преимущественно с непрерывными структурами, т. е. структурами, в которых суммы и произведения определены для любых, в том числе и бесконечных, подмножеств. Это ограничение вызвано лишь тем, что нас будут интересовать прямые разложения с бесконечным числом слагаемых; для случая разложений с конечным числом слагаемых все теоремы и их доказательства сохраняют силу и для обычных структур.

§ 1. Вполне дедекиндовы структуры

Определение дедекиндовой структуры может быть дано в следующей форме: *структура S дедекиндова, если из того, что элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n \geqslant 1)$ *подчинены условиям* $x_i \leqslant y_j$ *при* $i \neq j$, *следует справедливость равенства*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, y_1 y_2 \ldots y_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{1}$$

Действительно, полагая в (1) $n=2$ и $y_1 = x_1 + x_2$, мы получаем условие $(x_1 + x_2)\, y_2 = x_1 + x_2 y_2$ при $x_1 \leqslant y_2$, что и представляет собою обычное определение дедекиндовой структуры. Обратно, если структура S — дедекиндова в обычном смысле и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ подчинены условиям $x_i \leqslant y_j$ при $i \neq j$, то, применяя несколько раз обычное определение дедекиндовой структуры, мы получаем

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, y_1 y_2 \ldots y_n &= (x_1 y_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, y_2 \ldots y_n = \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 + \ldots + x_n)\, y_3 \ldots y_n = \ldots = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.\end{aligned}$$

Эта форма определения дедекиндовой структуры приводит в случае непрерывных структур к следующему понятию: непрерывная структура S будет называться в п о л н е д е д е к и н д о в о й, если для любых систем элементов x_α, y_α (где α пробегает некоторое множество индексов), удовлетворяющих условиям $x_\alpha \leqslant y_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, справедливо равенство

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right) \cdot \prod_\alpha y_\alpha = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha. \tag{2}$$

Всякая вполне дедекиндова структура является, конечно, дедекиндовой но не обратно; так, структура замкнутых подмножеств топологического пространства, как обычная структура даже дистрибутивная, не будет, вообще говоря, вполне дедекиндовой. Значение этого класса структур определяется следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1. *Структура (допустимых) нормальных делителей некоторой группы с произвольной системой операторов является вполне дедекиндовой.*

Действительно, пусть в группе G даны системы нормальных делителей X_α и Y_α (где α пробегает некоторое множество индексов), причем $X_\alpha \subseteq Y_\beta$ при $\alpha \neq \beta$. Если элемент a лежит в произведении всех X_α, то он может быть записан в виде $a = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n}$, где $x_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$ и все индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ различны. Если a содержится также во всех Y_α, в частности, в Y_{α_i}, то

$$x_{\alpha_i} = (x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_{i-1}})^{-1}\, a\, (x_{\alpha_{i+1}} \ldots x_{\alpha_n})^{-1} \subset Y_{\alpha_i},$$

т. е. элемент x_{α_i} содержится в пересечении $X_{\alpha_i} \cap Y_{\alpha_i}$, а поэтому a входит в произведение всех пересечений $X_\alpha \cap Y_\alpha$. Этим доказано одно из двух включений, составляющих вместе равенство (2); противоположное включение справедливо в любой структуре ввиду условий $x_\alpha \leqslant y_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

Пусть S — вполне дедекиндова структура, и ее элемент a будет суммой элементов a_α, где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{M}$,

$a = \sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M}} a_\alpha$. Введем обозначение $\overline{a}_\alpha = \sum\limits_{\beta \subset \mathfrak{M},\, \beta \neq \alpha} a_\beta$. Элемент a есть **прямая сумма** элементов a_α, $a = \dot{\sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M}}} a_\alpha$ (или $a = a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n$ в случае конечного числа слагаемых), если для всех α имеет место равенство $a_\alpha \cdot \overline{a}_\alpha = 0$. Докажем следующие свойства прямой суммы:

I. *Если $a = \dot{\sum\limits_{\alpha}} a_\alpha$ и все или некоторые слагаемые a_α разложены в прямую сумму элементов $a_{\alpha\beta}$, $a_\alpha = \dot{\sum\limits_{\beta}} a_{\alpha\beta}$, то $a = \dot{\sum\limits_{\alpha,\, \beta}} a_{\alpha\beta}$.*

Действительно, a будет суммой всех $a_{\alpha\beta}$ ввиду определения структуры и при фиксированных α и β

$$a_{\alpha\beta} \left(\sum_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma + \sum_{\delta \neq \beta} a_{\alpha\delta} \right) = a_{\alpha\beta} \left[a_\alpha \left(\sum_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma + \sum_{\delta \neq \beta} a_{\alpha\delta} \right) \right] = a_{\alpha\beta} \sum_{\delta \neq \beta} a_{\alpha\delta} = 0.$$

II. *Если $a = \dot{\sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M}}} a_\alpha$, $\mathfrak{M}'$ есть истинное подмножество множества $\mathfrak{M}$ и $b = \sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M}'} a_\alpha$, $c = \sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'} a_\alpha$, то $bc = 0$.*

Действительно, так как $a_\alpha \leqslant \overline{a}_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, получаем, применяя (2),

$$bc = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M}'} a_\alpha \cdot \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'} a_\alpha \leqslant \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M}'} a_\alpha \cdot \prod_{\alpha \subset \mathfrak{M}'} \overline{a}_\alpha = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M}'} a_\alpha \overline{a}_\alpha = 0.$$

III. *Если $a = \dot{\sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M}}} a_\alpha$ и множество $\mathfrak{M}$ разложено в сумму непересекающихся подмножеств $\mathfrak{M}_\beta$, причем $\sum\limits_{\alpha \subset \mathfrak{M}_\beta} a_\alpha = b_\beta$, то $a = \dot{\sum\limits_{\beta}} b_\beta$.*

Действительно, в силу II

$$b_\beta \cdot \sum_{\gamma \neq \beta} b_\gamma = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M}_\beta} a_\alpha \cdot \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M}_\beta} a_\alpha = 0.$$

IV. *Если $a = \dot{\sum\limits_{\alpha}} a_\alpha$ и для каждого α выбран элемент c_α, $0 \leqslant c_\alpha \leqslant a_\alpha$, то сумма c всех элементов c_α будет их прямой суммой. Эта сумма отлична от a, если хотя бы одно c_α отлично от соответствующего a_α.*

Действительно, $c_\alpha \cdot \sum\limits_{\beta \neq \alpha} c_\beta \leqslant a_\alpha \cdot \sum\limits_{\beta \neq \alpha} a_\beta = 0$. Если же $c = a$, то для всех β будем иметь

$$a_\beta = a_\beta \cdot a = a_\beta \cdot \sum_{\alpha} c_\alpha = c_\beta + a_\beta \sum_{\alpha \neq \beta} c_\alpha = c_\beta.$$

V. *Если $a = a_1 \dot{+} a_2$ и $a_1 \leqslant b \leqslant a$, то $b = a_1 \dot{+} ba_2$.*

Действительно, $b = ba = b\,(a_1 + a_2) = a_1 + ba_2$ и $a_1 \cdot ba_2 \leqslant a_1 a_2 = 0$.

Пусть

$$1 = \dot{\sum_{\alpha}} a_{\alpha} \tag{3}$$

— прямое разложение единицы вполне дедекиндовой структуры S и b — некоторый элемент этой структуры. Назовем, следуя Орэ ([6]), элемент

$$b^{a_{\alpha}} = a_{\alpha}(b + \bar{a}_{\alpha}),$$

где, как раньше, $\bar{a}_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} a_{\beta}$, — **компонентой** элемента b в слагаемом a_{α} прямого разложения (3) и докажем следующие утверждения:

VI. *Элемент b содержится в сумме своих компонент во всех слагаемых a_{α} прямого разложения* (3).

Действительно, ввиду (2)

$$\sum_{\alpha} b^{a_{\alpha}} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(b + \bar{a}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot \prod_{\alpha} (b + \bar{a}_{\alpha}) = \prod_{\alpha} (b + \bar{a}_{\alpha}) \geqslant b.$$

VII. *Если $1 = a \dot{+} \bar{a}$, а элемент b есть сумма элементов b_{β}, то $b^{a} = \sum_{\beta} b_{\beta}^{a}$.*

Действительно, из справедливости для всех β неравенств $b^{a} \geqslant b_{\beta}^{a}$ следует $b^{a} \geqslant \sum_{\beta} b_{\beta}^{a}$. С другой стороны, ввиду VI,

$$b = \sum_{\beta} b_{\beta} \leqslant \sum_{\beta} b_{\beta}^{a} + a,$$

а поэтому, используя дедекиндовость структуры, получаем

$$b^{a} \leqslant \left(\sum_{\alpha} b_{\beta}^{a} + \bar{a}\right)^{a} = a\left(\sum_{\beta} b_{\beta}^{a} + \bar{a}\right) = \sum_{\beta} b_{\beta}^{a} + a\bar{a} = \sum_{\beta} b_{\beta}^{a}.$$

VIII. *Если $1 = \dot{\sum_{\alpha \subset \mathfrak{M}}} a_{\alpha}$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ и $a = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{N}} a_{\alpha}$, $\bar{a} = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{N}} a_{\alpha}$, т. е. $1 = a \dot{+} \bar{a}$, то $b^{a} \leqslant \sum_{\alpha \subset \mathfrak{N}} b^{a_{\alpha}}$ для всякого элемента b.*

Действительно, ввиду (2)

$$b^{a} = a(b + \bar{a}) = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{N}} a_{\alpha}\left(b + \sum_{\alpha \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{N}} a_{\alpha}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha \subset \mathfrak{N}} a_{\alpha} \cdot \prod_{\alpha \subset \mathfrak{N}} (b + \bar{a}_{\alpha}) = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{N}} a_{\alpha}(b + \bar{a}_{\alpha}) = \sum_{\alpha \subset \mathfrak{N}} b^{a_{\alpha}}.$$

§ 2. Центр пары прямых разложений

Пусть единица вполне дедекиндовой структуры S двумя способами разложена в прямую сумму,

$$1 = \dot{\sum_{\alpha}} a_{\alpha} = \dot{\sum_{\beta}} b_{\beta}. \tag{4}$$

Назовем **центром этой пары разложений** элемент

$$z = \prod_{\alpha, \beta} (\bar{a}_\alpha + \bar{b}_\beta).$$

Это понятие можно определить также следующим образом: назовем **центром прямого слагаемого** a_α **первого из разложений** (4) **относительно второго разложения** элемент

$$z_\alpha = \sum_\beta b_\beta^{a_\alpha} \bar{b}_\beta^{a_\alpha}. \qquad (5)$$

Тогда *центр пары разложений* (4) *равен сумме центров всех прямых слагаемых одного из этих разложений относительно другого разложения.*

Действительно, так как $1 = \sum_\beta b_\beta$, а компонента единицы в слагаемом a_α первого разложения равна самому a_α, то, ввиду VII,

$$a_\alpha = \sum_\beta b_\beta^{a_\alpha}. \qquad (6)$$

Используя это равенство и определение вполне дедекиндовой структуры, мы получаем

$$z_\alpha = \sum_\beta b_\beta^{a_\alpha} \bar{b}_\beta^{a_\alpha} = \sum_\beta b_\beta^{a_\alpha} \cdot \prod_\beta \bar{b}_\beta^{a_\alpha} = a_\alpha \prod_\beta \bar{b}_\beta^{a_\alpha} = \prod_\beta \bar{b}_\beta^{a_\alpha}.$$

Отсюда

$$\sum_\alpha z_\alpha = \sum_\alpha \left(\prod_\beta \bar{b}_\beta^{a_\alpha} \right) = \sum_\alpha \left[\prod a_\alpha (\bar{b}_\beta + \bar{a}_\alpha) \right] = \sum_\alpha a_\alpha \left[\prod_\beta (\bar{b}_\beta + \bar{a}_\alpha) \right].$$

Используя еще раз определение вполне дедекиндовой структуры, мы получаем, наконец,

$$\sum_\alpha z_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \prod \left[\prod_\beta (\bar{b}_\beta + \bar{a}_\alpha) \right] = \prod_\alpha (\bar{b}_\beta + \bar{a}_\alpha) = z. \qquad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. *Если S есть структура нормальных делителей некоторой группы, то центр всякой пары прямых разложений этой группы содержится в центре самой группы. Если S есть структура двусторонних идеалов некоторого кольца, то центр всякой пары двусторонних прямых разложений этого кольца содержится в идеале $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля.*

Доказательство без затруднений вытекает из (5) и (7). Достаточно заметить, что если в некоторой группе (некотором кольце) элементы x и y перестановочны (взаимно аннулируются), то всякая компонента одного из этих элементов перестановочна (взаимно аннулируется) с другим элементом.

ТЕОРЕМА 3. *Прямые разложения* (4) *во вполне дедекиндовой структуре S тогда и только тогда обладают общим продолжением, если центр этой пары разложений равен нулю.*

Доказательство. Из свойств IV и I прямой суммы следует, что сумма (по всем α и β) произведений $a_\alpha b_\beta$ будет их прямой суммой. Отсюда, если разложения (4) обладают каким-либо общим продолжением,

вытекает, ввиду свойств III и IV, что имеет место прямое разложение $1=\dot{\sum\limits_{\alpha,\beta}} a_\alpha b_\beta$, также служащее общим продолжением для разложений (4). Отсюда следуют равенства

$$a_\alpha=\dot{\sum_\beta} a_\alpha b_\beta, \quad b_\beta=\dot{\sum_\alpha} a_\alpha b_\beta. \tag{8}$$

Из определения компоненты вытекает $b_\beta^{a_\alpha}\geqslant a_\alpha b_\beta$, откуда, по V,

$$b_\beta^{a_\alpha}=a_\alpha b_\beta+b_\beta^{a_\alpha}\sum_{\gamma\neq\beta} a_\alpha b_\gamma.$$

Однако, ввиду (8) и II,

$$b_\beta^{a_\alpha}\sum_{\gamma\neq\beta} a_\alpha b_\gamma=a_\alpha(b_\beta+\bar{a}_\alpha)\sum_{\gamma\neq\beta} a_\alpha b_\gamma=(b_\beta+\bar{a}_\alpha)\sum_{\gamma\neq\beta} a_\alpha b_\gamma=$$
$$=\Big(\dot{\sum_\delta} a_\delta b_\beta+\sum_{\sigma\neq\alpha,\tau} a_\sigma b_\tau\Big)\sum_{\gamma\neq\beta} a_\alpha b_\gamma=0,$$

т. е. для всех α и β имеют место равенства $b_\beta^{a_\alpha}=a_\alpha b_\beta$. Отсюда, используя VII и (8), получаем, что центр прямого слагаемого a_α относительно второго из разложений (4) равен нулю,

$$z_\alpha=\sum_\beta b_\beta^{a_\alpha}\bar{b}_\beta^{a_\alpha}=\sum_\beta\Big(b_\beta^{a_\alpha}\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^{\bar{a}_\alpha}\Big)=\sum_\beta\Big(a_\alpha b_\beta\sum_{\gamma\neq\beta} a_\alpha b_\gamma\Big)=0.$$

Равен нулю, следовательно, и весь центр разложений (4).

Пусть теперь, обратно, центр пары разложений (4) равен нулю. Ввиду (6), для элемента a_α имеет место равенство $a_\alpha=\sum\limits_\beta b_\beta^{a_\alpha}$. Из равенства $z_\alpha=0$ без труда следует, ввиду VII, что эта сумма прямая, а поэтому мы приходим к прямому разложению единицы, $1=\dot{\sum\limits_{\alpha,\beta}} b_\beta^{a_\alpha}$, продолжающему первое из разложений (4). Переписывая это разложение в виде $1=\dot{\sum\limits_\beta}\Big(\dot{\sum\limits_\alpha} b_\beta^{a_\alpha}\Big)$ и учитывая, что, ввиду VI, $b_\beta\leqslant\dot{\sum\limits_\alpha} b_\beta^{a_\alpha}$, мы получаем на основании $1=\dot{\sum\limits_\beta} b_\beta$ и IV, что для всех β будет $b=$ $=\dot{\sum\limits_\alpha} b_\beta^{a_\alpha}$, т. е. полученное нами прямое разложение служит продолжением и для второго из разложений (4).

§ 3. Обобщение теоремы Головина

Доказываемые в этом параграфе теоремы 4 и 5 относятся к произвольной вполне дедекиндовой структуре S, и вторая из них является усилением первой. Для случая групп эти теоремы приводят к обобщению указанной во введении теоремы Головина.

Элементы a и b структуры S называются *прямо подобными*, если они обладают общим дополнением, т. е. если в S существует такой элемент c, что

$$a+c=b+c=1, \quad ac=bc=0.$$

В структуре нормальных делителей группы из прямого подобия следует центральный изоморфизм. Аналогично *два двусторонних идеала некоторого кольца, прямо подобные в структуре всех двусторонних идеалов этого кольца, будут $\mathfrak{R}$-изоморфными.* Действительно, пусть идеалы A, B и C кольца R связаны соотношениями $A+C=B+C=R$, $A\cap C=B\cap C=0$. Всякий элемент a из A может быть записан в виде $a=b+c$, где $b\subset B$, $c\subset C$. Сопоставляя элементу a этот элемент b, мы получаем, как легко проверить, кольцевой изоморфизм между идеалами A и B. Этот изоморфизм будет $\mathfrak{R}$-изоморфизмом, так как, умножая равенство $a=b+c$ слева или справа на любой элемент c' из C, мы получим $c'c=cc'=0$, т. е. элемент c является полным делителем нуля в C, а следовательно и в R.

Два прямых разложения будем называть прямо подобными, если между слагаемыми этих разложений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие слагаемые прямо подобны.

ТЕОРЕМА 4. *Если центр z прямых разложений*

$$1=a\dot{+}\dot{\sum_{\nu}} u_\nu=\dot{\sum_{\beta}} b_\beta \tag{9}$$

удовлетворяет условию $z\leqslant a$, то эти разложения обладают прямо подобными продолжениями.

Доказательство. Введем обозначение $u=\dot{\sum\limits_{\nu}} u_\nu$ и рассмотрим сперва прямые разложения

$$1=a\dot{+}u=\dot{\sum_{\beta}} b_\beta. \tag{10}$$

Центр z' этой пары разложений удовлетворяет условию

$$z'=\prod_\beta (u+\bar{b}_\beta)\cdot\prod_\beta (a+\bar{b}_\beta)\leqslant\prod_\beta (u+\bar{b}_\beta)\times$$
$$\times\prod_{\beta,\nu}\Big(a+\sum_{\mu\neq\nu} u_\mu+\bar{b}_\beta\Big)=z\leqslant a,$$

т. е. центр прямого слагаемого u относительно второго из разложений (10) равен нулю. Отсюда следует, что для всех β имеет место равенство $b_\beta^*\cdot\bar{b}_\beta^*=0$, т. е. ввиду (6) и VII мы приходим к прямому разложению $u=\sum\limits_\beta b_\beta^*$, откуда

$$1=a\dot{+}\sum_\beta b_\beta^*. \tag{11}$$

Ввиду VI, $a+\sum\limits_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*\geqslant\bar{b}_\beta$, откуда по V следует

$$a\dot{+}\dot{\sum_{\gamma\neq\beta}} b_\gamma^*=\bar{b}_\beta\dot{+}\Big(a+\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*\Big)\,b_\beta. \tag{12}$$

Применяя условие дедекиндовости, мы получаем, ввиду $a+b_\beta^* \geqslant b_\beta$,

$$\left(a+\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*\right) b_\beta=\left(a+\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*\right)(a+b_\beta^*)\, b_\beta= \\ =\left[a+(a+b_\beta^*)\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*\right] b_\beta.$$

Так как по условию дедекиндовости $(a+b_\beta^*)\,u=au+b_\beta^*=b_\beta^*$, то

$$(a+b_\beta^*)\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^* \leqslant b_\beta^* \sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*=b_\beta^*\overline{b}_\beta^*=0,$$

т. е. $\left(a+\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*\right) b_\beta=ab_\beta$. Равенство (12) превращается теперь в

$$a\dot{+}\sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma^*=\overline{b}_\beta\dot{+}ab_\beta,$$

т. е. прямое разложение (11) приводит при любом β к разложению

$$1=b_\beta^*\dot{+}\overline{b}_\beta\dot{+}ab_\beta. \tag{13}$$

Отсюда и из $1=b_\beta^*\dot{+}\overline{b}_\beta$ следует, ввиду $b_\beta^*\geqslant ab_\beta$ и V, прямое разложение

$$b_\beta=ab_\beta\dot{+}(b_\beta^*+\overline{b}_\beta)\,b_\beta, \tag{14}$$

т. е. мы получаем следующее *продолжение второго из прямых разложений* (10)

$$1=\dot{\sum_\beta} ab_\beta\dot{+}\dot{\sum_\beta} c_\beta, \tag{15}$$

где $c_\beta=(b_\beta^*+\overline{b}_\beta)\,b_\beta$. Далее, ввиду VI,

$$\dot{\sum_\beta} ab_\beta\leqslant a\leqslant\dot{\sum_\beta} a^{b_\beta}. \tag{16}$$

Однако, ввиду (14) и условия дедекиндовости,

$$a^{b_\beta}=b_\beta(a+\overline{b}_\beta)=[ab_\beta+(b_\beta^*+\overline{b}_\beta)\,b_\beta](a+\overline{b}_\beta)= \\ =ab_\beta+(b_\beta^*+\overline{b}_\beta)\,b_\beta(a+\overline{b}_\beta)=ab_\beta+[b_\beta^*(a+\overline{b}_\beta)+\overline{b}_\beta]\,b_\beta.$$

Отсюда и из равенства

$$b_\beta^*(a+\overline{b}_\beta)=u(a+b_\beta)(a+\overline{b}_\beta)=b_\beta^*\cdot\overline{b}_\beta^*=0$$

следует теперь $a^{b_\beta}=ab_\beta+\overline{b}_\beta b_\beta=ab_\beta$, т. е. неравенства (16) приводят к прямому разложению $a=\dot{\sum_\beta} ab_\beta$. Мы получаем *продолжение первого из разложений* (10):

$$1=\dot{\sum_\beta} ab_\beta\dot{+}\dot{\sum_\beta} b_\beta^*. \tag{17}$$

Прямые разложения (15) *и* (17) *прямо подобны*. Действительно, дополнением для элемента b_β^* служит, ввиду (13), элемент $\overline{b}_\beta+ab_\beta$. Он служит, однако, дополнением и для c_β, так как по (14) и (13)

$$(b_\beta^*+\overline{b}_\beta)\,b_\beta+\overline{b}_\beta+ab_\beta=b_\beta+\overline{b}_\beta=1, \\ (b_\beta^*+\overline{b}_\beta)\,b_\beta(\overline{b}_\beta+ab_\beta)=[b_\beta^*(\overline{b}_\beta+ab_\beta)+\overline{b}_\beta]\,b_\beta=\overline{b}_\beta\cdot b_\beta=0.$$

Переходим к рассмотрению разложений (9). Центр всякого из прямых слагаемых u_ν относительно второго из этих разложений равен нулю, а поэтому, повторяя рассуждения, проведенные в первых строках доказательства теоремы, мы получаем для всех ν прямые разложения

$$u_\nu = \dot{\sum_\beta} b_\beta^{u_\nu}, \tag{18}$$

откуда $u = \dot{\sum\limits_{\nu,\beta}} b_\beta^{u_\nu}$, т. е. ввиду (17)

$$1 = \dot{\sum_\beta} ab_\beta \dot{+} \dot{\sum_{\nu,\beta}} b_\beta^{u_\nu}. \tag{19}$$

Это прямое разложение служит продолжением для разложения (17), так как по VIII $b_\beta^u \leqslant \dot{\sum\limits_\nu} b_\beta^{u_\nu}$, но знак неравенства привел бы к противоречию с IV. Элементы b_β^u и c_β, будучи прямо подобными, обладают общим дополнением, которое мы обозначим через d_β. Если мы положим

$$c_{\beta\nu} = (b_\beta^{u_\nu} + d_\beta)\, c_\beta,$$

то, как следует из теоремы об изоморфизме для дедекиндовых структур, прямое разложение $b_\beta^u = \dot{\sum\limits_\nu} b_\beta^{u_\nu}$ приведет к прямому разложению $c_\beta = \dot{\sum\limits_\nu} c_{\beta\nu}$, т. е.

$$1 = \dot{\sum_\beta} ab_\beta + \dot{\sum_{\nu,\beta}} c_{\beta\nu} \tag{20}$$

будет продолжением разложения (15). Разложения (19) и (20) будут искомыми прямо подобными продолжениями заданных прямых разложений (9). Действительно, элементы $b_\beta^{u_\nu}$ и $c_{\beta\nu}$ прямо подобны в элементе $b_\beta^{u_\nu} + d_\beta = c_{\beta\nu} + d_\beta$, который сам служит прямым слагаемым для единицы структуры S.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть даны прямые разложения*

$$1 = \dot{\sum_\alpha} a_\alpha \dot{+} \dot{\sum_\nu} u_\nu = \dot{\sum_\beta} b_\beta \tag{21}$$

с центром z, причем $z \leqslant a$, где

$$a = \dot{\sum_\alpha} a_\alpha. \tag{22}$$

Тогда элемент a обладает прямым разложением

$$a = \dot{\sum_\beta} ab_\beta, \tag{23}$$

и из существования прямо подобных продолжений для прямых разложений (22) и (23) элемента a следует существование прямо подобных продолжений для заданных разложений (21).

Доказательство. Применяя предшествующую теорему к прямым разложениям

$$1 = a \dot{+} \dot{\sum_{\nu}} u_{\nu} = \dot{\sum_{\beta}} b_{\beta},$$

мы приходим к их прямо подобным продолжениям (19) и (20), а также доказываем существование прямого разложения (23). Существующие по предположению прямо подобные продолжения для разложений (22) и (23) обозначим соответственно через (A) и (B); они будут прямо подобны не только в элементе a, но и во всей структуре, так как элемент a сам служит прямым слагаемым для единицы. Заменяя сумму $\sum_{\beta} ab_{\beta}$ в (19) через (A), а в (20) через (B), мы придем к искомым прямо подобным продолжениям разложений (21).

§ 4. Структуры с обрывом убывающих нормальных цепей

Теперь рассматривается произвольная структура S с нулем, т. е. структура, относительно которой ни непрерывность, ни дедекиндовость не предполагаются. Для всякого элемента a этой структуры среди элементов, ему предшествующих, выделено некоторое множество N_a из элементов, называемых нормальными в a (этот прием был употреблен Узковым(9) при перенесении в теорию структур теоремы Жордана-Гельдера), причем предполагаются выполненными следующие условия:

(α) Множество N_a содержит элементы 0 и a.

(β) Множество N_a есть дедекиндова подструктура структуры S.

(γ) Если $c \leqslant b \leqslant a$ и $c \subset N_a$, $b \subset N_a$, то $c \subset N_b$.

В дальнейшем, говоря о прямых разложениях некоторого элемента a, мы будем ограничиваться его разложениями в дедекиндовой структуре N_a, единицей которой он является, и лишь для этого случая употреблять символ $\dot{+}$. На выбор множеств N_a мы накладываем, далее, следующее условие:

(δ) Если $a = b \dot{+} \bar{b} = c \dot{+} \bar{c}$ и $d \subset N_{b^c}$, где $b^c = c(b + \bar{c})$, то $d \subset N_a$.
Отсюда при $c = a$, $\bar{c} = 0$ следует: если $a = b \dot{+} \bar{b}$ и $d \subset N_b$, то $d \subset N_a$.

Будем называть убывающей нормальной цепью всякую такую последовательность элементов (конечную или бесконечную) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$, что $a_{n+1} \subset N_{a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Элемент b называется достижимым в a, если он входит в некоторую убывающую нормальную цепь, начинающуюся с элемента a. Для элемента a выполняется условие минимальности, если все убывающие нормальные цепи, начинающиеся с элемента a, конечны; если это условие имеет место, то всякое прямое разложение элемента a состоит из конечного числа слагаемых и может быть продолжено до прямого разложения с неразложимыми слагаемыми.

Пусть даны два прямых разложения элемента a с конечным числом неразложимых слагаемых,

$$a = b_1 \dot{+} b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} b_k = c_1 \dot{+} c_2 \dot{+} \ldots \dot{+} c_l.$$

Будем говорить, что эта пара разложений удовлетворяет условию замещаемости, если для всякого b_i можно указать такое c_j, что имеет место прямое разложение $a = c_j \dotplus \bar{b}_i$, и если аналогичное утверждение имеет место для слагаемых из второго разложения. Замет... что если элемент a обладает прямыми разложениями с конечным числом неразложимых слагаемых и если всякие два таких прямых разложения удовлетворяют условию замещаемости, то все эти разложения прямо подобны между собой. Доказательство достигается последовательным замещением слагаемых одного из этих разложений слагаемыми из другого разложения.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть в структуре S для всех элементов x выбраны множества N_x со свойствами* (α)—(δ). *Пусть, далее, для элемента a выполняется условие минимальности. Пусть, наконец, всякая пара прямых разложений (с неразложимыми слагаемыми) любого элемента a', достижимого в a, имеющая своим центром сам этот элемент a', удовлетворяет условию замещаемости. Тогда для произвольной пары прямых разложений (с неразложимыми слагаемыми) элемента a выполняется условие замещаемости и поэтому все эти разложения прямо подобны между собой.*

Доказательство. Условие минимальности позволяет предполагать ввиду транзитивности понятия достижимости, что для элементов, отличных от a и достижимых в нем, теорема уже доказана. Пусть даны два прямых разложения элемента a с неразложимыми слагаемыми,

$$a = b_1 \dotplus b_2 \dotplus \ldots \dotplus b_k = c_1 \dotplus c_2 \dotplus \ldots \dotplus c_l, \tag{24}$$

причем *центр z этой пары разложений отличен от a*, и будем доказывать возможность заместить элемент b_1 некоторым слагаемым из второго разложения. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{l} b_1^{c_i}. \tag{25}$$

Все слагаемые этой суммы нормальны в a и поэтому по (γ) нормальны в f, т. е. (25) будет прямым разложением для f. Рассмотрим отдельно случаи $f < a$ и $f = a$.

1) Пусть $f < a$, и поэтому для f теорема уже доказана. Так как $f \geqslant b_1$, ввиду VI, то

$$f = b_1 \dotplus d, \tag{26}$$

где $d = f \cdot \bar{b}_1$. Продолжим (25) и (26) до разложений с неразложимыми слагаемыми. Слагаемое b_1 в разложении (26) останется неразложимым ввиду (δ), и поэтому оно может быть замещено некоторым слагаемым из продолжения разложения (25), например, $b_1^{c_1} = g \dotplus \bar{g}$ и $f = g \dotplus d$. Отсюда $gd = 0$, т. е. $gf\bar{b}_1 = g\bar{b}_1 = 0$. По ($\delta$) $g \subset N_a$, но сумма $g + \bar{b}_1$ содержит $\bar{b}_1$, и, содержа f, содержит b_1, а поэтому мы получаем для a прямое разложение $a = g \dotplus \bar{b}_1$. Так как $g \leqslant b_1^{c_1} \leqslant c_1$, то из $g < c_1$ следовала бы по V разложимость элемента c_1; поэтому $g = b_1^{c_1} = c_1$, т. е. $a = c_1 \dotplus \bar{b}_1$. Мы доказали, что слагаемое b_1 из первого из раз-

ложений (24) может быть замещено элементом c_1, причем обнаружили, что *компонента* b_1 *в* c_1 *совпадает с* c_1.

2) Пусть теперь $f=a$, т. е. $b_1^{c_j}=c_j'$ для всех j. Отсюда следует

$$z=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{l} b_i^{c_j}\overline{b}_i^{c_j}=\sum_{j=1}^{l}\left(\overline{b}_1^{c_j}+\sum_{i=2}^{k} b_i^{c_j}\overline{b}_i^{c_j}\right)\geqslant\sum_{j=1}^{l}\overline{b}_1^{c_j}\geqslant\overline{b}_1. \tag{27}$$

Теперь легко показать, что самое большее одно слагаемое второго разложения (24) может иметь компоненту в b_1, совпадающую с самим b_1. Действительно, если бы было, например, $c_1^{b_1}=c_2^{b_1}=b_1$, то, ввиду $\overline{c}_1\geqslant c_2$, мы имели бы равенство $\overline{c}_1^{b_1 2}=b_1$, а поэтому было бы

$$z\geqslant c_1^{b_1}\overline{c}_1^{b_1}=b_1,$$

что вместе с (27) привело бы к равенству $z=a$ в противоречие с предположением. Можно считать, следовательно, что компоненты в b_1 элементов $c_2, \ldots, c_l$ отличны от b_1, т. е. к этим элементам применимы рассмотрения первого случая: их можно последовательно заменить слагаемыми из первого разложения, причем ввиду замечания, сделанного в конце предыдущего абзаца, при этом замещении не будет использован элемент b_1. Мы придем, например, к следующему прямому разложению:

$$a=c_1\dot{+}b_2\dot{+}\ldots\dot{+}b_l.$$

Поэтому элементы c_1 и $b_1\dot{+}b_{l+1}\dot{+}\ldots\dot{+}b_k$ прямо подобны в структуре N_a, откуда ввиду неразложимости c_1 следует $k=l$, т. е. следует возможность замещения элемента b_1 в первом из разложений (24) элементом c_1. Теорема доказана.

§ 5. Приложения к теории колец

Используя утверждение, что центр всякой пары двусторонних прямых разложений кольца содержится в идеале $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля этого кольца (теорема 2), и замечание из § 3 о том, что из прямого подобия идеалов кольца следует их $\mathfrak{N}$-изоморфизм, можно вывести из теорем, доказанных выше, ряд теорем об $\mathfrak{N}$-изоморфизме двусторонних прямых разложений колец. Укажем некоторые из этих теорем, причем нигде не будем предполагать, что умножение в кольце коммутативно или ассоциативно.

ТЕОРЕМА 7 (следствие из теоремы 3). *Если кольцо R не содержит полных делителей нуля, отличных от самого нуля, то всякие два двусторонних прямых разложения этого кольца обладают общим продолжением.*

Отсюда следует отмеченная во введении теорема из ([4]) о кольцах с единицей.

ТЕОРЕМА 8 (следствие из теоремы 4). *Если даны двусторонние прямые разложения кольца R,*

$$R=A+\sum U_\nu=\sum_{\beta} B_\beta,$$

причем идеал $\mathfrak{N}$ кольца R содержится в A, то эти раз. жения обладают $\mathfrak{N}$-изоморфными продолжениями.

Так как идеал полных делителей нуля прямой суммы равен прямой сумме идеалов полных делителей нуля отдельных слагаемых, то из теоремы 8 следует, что, *если идеал $\mathfrak{N}$ кольца R неразложим в прямую сумму, то любые два прямых разложения кольца R обладают $\mathfrak{N}$-изоморфными продолжениями.*

Рассмотрения § 4 имели целью перенести в теорию структур отмеченный во введении результат автора, относящийся к группам с обрывом убывающих нормальных цепей. Действительно, если S есть система всех подгрупп некоторой группы без операторов и для всякой подгруппы A множество N_A есть совокупность всех нормальных делителей подгруппы A, то справедливость свойств (α) — (δ) устанавливается без всяких затруднений. Формулировка теоремы 6 содержит, однако, предположение, что всякая пара прямых разложений (с неразложимыми слагаемыми) некоторого элемента, имеющая своим центром сам этот элемент, удовлетворяет условию замещаемости. Ввиду первой части теоремы 2 это предположение влечет за собою коммутативность рассматриваемой подгруппы. Таким образом интересующая нас теорема, относящаяся к некоммутативным группам, вытекает из теоретико-структурной теоремы 6 и соответствующей теоремы для абелевых групп, также доказанной автором в работе 1932 г.

Пусть теперь S будет структурой всех подколец некоторого кольца, а множество N_A — совокупность двусторонних идеалов подкольца A. Тогда условия (α) — (δ) снова будут выполняться, а содержащееся в формулировке теоремы 6 предположение о парах прямых разложений, центр которых совпадает с разлагаемым элементом, приводит ввиду второй части теоремы 2 к рассмотрению подколец, совпадающих со своим идеалом полных делителей нуля, т. е. снова к теореме об абелевых группах с условием минимальности. Таким образом справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9. *Если кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек подколец*

$$R = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots,$$

где всякое A_n есть двусторонний идеал в A_{n-1}, то два любых двусторонних прямых разложения кольца R с неразложимыми слагаемыми $\mathfrak{N}$-изоморфны между собой и удовлетворяют условию замещаемости.

Теорему Коржинека (см. введение) пока не удалось перенести в теорию структур. Тем не менее можно утверждать справедливость следующей теоремы о двусторонних прямых суммах колец, параллельной теореме Коржинека и обобщающей теорему 9 (так как всякая аддитивная подгруппа идеала $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля некоторого кольца является двусторонним идеалом во всем кольце, то условие минимальности в идеале $\mathfrak{N}$, входящее в формулировку этой теоремы, можно понимать как в групповом, так и в кольцевом смысле).

ТЕОРЕМА 10. *Если идеал $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля кольца R удовлетворяет условию минимальности, то всякие два двусторонних прямых разложения кольца R обладают $\mathfrak{N}$-изоморфными продолжениями.*

Мы опускаем доказательство этой теоремы, так как для случая конечного числа слагаемых оно является по существу повторением доказательства теоремы Коржинека из ([1]), приспособленным к рассматриваемому случаю, а на разложения с бесконечным числом слагаемых распространяется тем же методом, каким пользовался Головин ([2]) в случае групп.

Теорема Мори, указанная во введении, *является весьма частным следствием теорем* 8 *и* 10. Действительно, если кольцо R удовлетворяет ослабленному условию минимальности, то его идеал $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля также будет удовлетворять этому условию. Известно, что абелева группа с ослабленным условием минимальности или удовлетворяет обычному условию минимальности, или же является бесконечной циклической группой, т. е. не разложима в прямую сумму [см., например, Мори ([5]); это утверждение без труда выводится, впрочем, из основных теорем теории абелевых групп]. В первом случае теорема Мори будет содержаться в теореме 10, во втором — в следствии из теоремы 8.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 XII 1942

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Kořinek, Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sous-groupes, Čas. mat. fys., **66** (1937), 261—286; **67** (1938), 209—210.
[2] О. Н. Головин, Множители без центров в прямых разложениях групп, Мат. сб., нов. с., **6** (1939), 423—426.
[3] A. Kurosch, Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Мат. сб., нов. с., **1** (1936), 345—350.
[4] Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, § 116.
[5] Sh. Mori, Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz, J. Hiroshima Univ., **6** (1936), 139—146, 257—259.
[6] O. Ore, On the foundation of abstract algebra. II, Ann. of Math., **37** (1936), 265—292.
[7] G. Birkhoff, Lattice theory, New York, 1940.
[8] А. Г. Курош, Теория групп, печатается в Гос. тех.-теорет. издательстве.
[9] А. И. Узков, О теореме Jordan'a-Hölder'a, Мат. сб., нов. с., **4** (1938), 31—43.

A. KUROSCH. ISOMORPHISMS OF DIRECT DECOMPOSITIONS

SUMMARY

In the present paper we show that to every group-theoretical theorem concerning the central isomorphism of direct decompositions there corresponds a parallel theorem on two-sided decompositions of rings into a direct sum without any assumptions about the commutativity or associativity of the multiplication in these rings. Instead of the centrum of the group we have in these theorems the *ideal* $\mathfrak{N}$ *of complete divisors of the null* in the given ring R, *i. e.* the totality of such elements a that $ax = xa = 0$ for any $x \subset R$; the central isomorphism is replaced by the $\mathfrak{N}$-*isomorphism*, *i. e.* such an isomorphism between two subrings of the ring R, for which the difference between the corresponding elements belongs to $\mathfrak{N}$.

As we have revealed, the parallelism between the two theories roots in the theory of structures. The only theorems that we have not succeeded to extend on the structures are Kořinek's theorem and the corresponding theorem in the theory of rings. We now expose the contents of each chapter separately.

§ 1. Completely Dedekind structures

We consider the continuous structures, *i. e.* such that the sum and the product are defined for all their (infinite) subsets. A continuous structure will be called the completely Dedekind structure if for any systems of elements x_α, y_α (α ranges through a set of indices) satisfying the conditions $x_\alpha \leqslant y_\beta$ for $\alpha \neq \beta$ we have

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right) \prod_\alpha y_\alpha = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha.$$

THEOREM 1. *The structure of (admissible) invariant subgroups of a group (with an arbitrary domain of operators) is a completely Dedekind structure.*

Let S be a completely Dedekind structure and the element a be the sum of elements a_α. Introduce the notation $\bar{a}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta$. The element a is the direct sum of a_α, $a = \dot{\sum_\alpha} a_\alpha$, if the equality $a_\alpha \cdot \bar{a}_\alpha = 0$ holds for every α. If $1 = \dot{\sum_\alpha} a_\alpha$ and b belongs to S, then

$$b^{a_\alpha} = a_\alpha (b + \bar{a}_\alpha)$$

is the component of b in the summand a_α of the given direct decomposition of the unit. The usual properties (in the theory of group) of these notions are valid in the general case (properties I — VIII).

§ 2. Centrum of a pair of direct decompositions

Let the unit of a completely Dedekind structure be in two ways decomposed into the direct sum,

$$1 = \dot{\sum_\alpha} a_\alpha = \dot{\sum_\beta} b_\beta.$$

By the centrum of this pair of decompositions we mean the element

$$z = \prod_{\alpha,\beta} (\bar{a}_\alpha + \bar{b}_\beta),$$

where as above $\bar{a}_\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma$, $\bar{b}_\beta = \sum_{\delta \neq \beta} b_\delta$. It is possible to prove that

$$z = \sum_{\alpha,\beta} b_\beta^{a_\alpha} \bar{b}_\beta^{a_\alpha}.$$

THEOREM 2. *If S is the structure of invariant subgroups of a group then the centrum of any pair of direct decompositions of this group is con-*

tained in the centrum of the group itself. If S is the structure of two-sided ideals of a ring, then the centrum of any pair of direct decompositions of this ring is contained in the ideal $\mathfrak{N}$ of complete divisors of the null.

THEOREM 3. *The direct decompositions $1=\dot{\sum\limits_{\alpha}} a_\alpha=\dot{\sum\limits_{\beta}} b_\beta$ in a completely Dedekind structure S possess a common continuation if and only if the centrum of this pair of decompositions is the null.*

§ 3. A generalization of Golovin's theorem

The elements a and b of a structure S are called directly similar if there exists an element c in S such that

$$a+c=b+c=1, \qquad ac=bc=0.$$

The direct similarity of two two-sided ideals of a ring implies the existence of an $\mathfrak{N}$-isomorphism between them.

The following theorem, being applied to groups, yields a generalization of a theorem due to Golovin [2]:

THEOREM 4. *If the centrum z of direct decompositions*

$$1=a\dotplus\dot{\sum_{\nu}} u_\nu=\dot{\sum_{\beta}} b_\beta$$

satisfies the condition $z\leqslant a$, then the decompositions possess directly similar continuations.

Theorem 5 is a generalization of Theorem 4.

§ 4. Structures satisfying the descending normal chain condition

Let S be an arbitrary structure with the null. Assume that to any element a there corresponds a subset N_a of the set of elements $\leqslant a$ with the properties:

(α) N_a contains 0 and a.

(β) N_a is a Dedekind substructure of S.

(γ) If $c\leqslant b\leqslant a$ and $c\subset N_a$, $b\subset N_a$, then $c\subset N_b$.

(δ) If $a=b\dotplus\bar{b}=c\dotplus\bar{c}$ and $d\subset N_{b^c}$, then $d\subset N_a$.

The sequence of elements $a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots$ is called the descending normal chain if $a_{n+1}\subset N_{a_n}$, $n=1,2,\ldots$ Theorem 6 is proved under the descending normal chain condition. Being applied to groups it gives a theorem of the author on non-commutative groups satisfying the descending normal chain condition by use of the corresponding theorem for Abelian groups.

§ 5. Applications to the theory of rings

THEOREM 7. *If the ring R does not contain any complete divisors of the null except the null itself, then any two direct decompositions of the ring possess a common continuation.*

Hence follows the well known theorem of uniqueness of decompositions of a ring with the unit into the direct sum.

THEOREM 8. *If* $R = A + \sum_{\nu} U_{\nu} = \sum_{\beta} B_{\beta}$ *are two-sided direct decompositions of the ring R and the ideal* $\mathfrak{N}$ *of R is contained in A, then there exist* $\mathfrak{N}$*-isomorphic continuations of these decompositions.*

The conditions of this theorem are fulfilled, in particular, when the ideal $\mathfrak{N}$ cannot be decomposed into a direct sum.

Theorem 9 follows from Theorem 6. The following theorem is a generalization of the former (since every additive subgroup of the ideal $\mathfrak{N}$ is a two-sided ideal in the whole ring, the minimal condition for $\mathfrak{N}$ may be understood both in the group and in the ring sense):

THEOREM 10. *If the ideal* $\mathfrak{N}$ *of complete divisors of the null of the ring R satisfies the minimal condition, then any two-sided direct decompositions of R possess* $\mathfrak{N}$*-isomorphic continuations.*

This theorem is analogous to a group-theoretical theorem due to Kořinek ([1]) and its proof can be carried out by Kořinek's method, provided that the number of summands is finite. Otherwise the theorem can be proved by a method used by Golovin in the case of groups.

Theorems 8 and 10 imply Mori's theorem([5]) on the $\mathfrak{N}$-isomorphism of direct decompositions of commutative rings under the weakened minimal condition.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 203—236 Série mathématique

Д. А. ВАСИЛЬКОВ

УПОРЯДОЧЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ МНОЖЕСТВ И ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Исследуются свойства совокупности $\overline{\mathfrak{M}}$ (соответственно $\mathfrak{E}$) всевозможных (линейных) упорядочений произвольного множества M (линейной системы E). Различные классы линейных упорядочений системы E и системы F линейных функций в E изучаются с точки зрения «расположения», соответственно, в $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$.

Введение

Пусть $\overline{\mathfrak{M}}$ — совокупность всех упорядочений* Ω произвольного множества M. Естественно определить $\Omega' < \Omega''$ ($\Omega' \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\Omega'' \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\Omega' \neq \Omega''$), если упорядочение Ω'' сильнее Ω', т. е. соотношение $x < y$ ($x \in M$, $y \in M$) имеет место в смысле Ω'', если оно имеет место в смысле Ω'. Упорядоченное таким образом множество $\overline{\mathfrak{M}}$ оказывается замкнутым относительно операций пересечения и объединения.

Это свойство $\overline{\mathfrak{M}}$ устанавливается в § 1. Там же доказывается теорема о представлении элементов $\Omega \in \overline{\mathfrak{M}}$ в виде пересечения точных упорядочений (теорема 1. 2), причем применяется метод упорядочивающих функций.

Если E — линейная система, то совокупность $\mathfrak{E}$ линейных упорядочений E (т. е. подчиняющихся аксиомам I и II) обладает свойствами, аналогичными свойствам $\overline{\mathfrak{M}}$. Они устанавливаются в § 2. Упорядочивающая функция, отнесенная к упорядочению Ω, а тем самым и само Ω, полностью определяются некоторым коническим множеством $C \subset E$.

В § 3 дается классификация линейных упорядочений, основанная на свойствах ограниченности «лучей» $R_x = \{\lambda x;\ 0 \leqslant \lambda < +\infty\}$ в E. Эти свойства определяются строением множества граничных элементов конического множества C.

---

* Представляется целесообразным пользоваться терминами «упорядочение», «упорядоченное множество» и т. п. вместо «частичное упорядочение», «частично (или «полу-) упорядоченное множество» и т. п. (ср. ([1])). Упорядочение, при котором из любых двух элементов множества один непременно предшествует другому, мы называем «точным упорядочением». Термин же «линейное упорядочение», употребляемый иногда в этом смысле, имеет у нас специальное значение (см. § 2).

В § 4 приводятся некоторые теоремы об архимедовых и однородных упорядочениях.

В § 5 излагаются свойства открытых упорядочений, в известном смысле двойственных упорядочениям архимедовым.

В § 6 приводятся некоторые теоремы существования положительных линейных функций, находящие свое применение в следующем разделе.

В § 7 наряду с линейной системой E рассматривается система F линейных функций в E. Исследуются свойства отображений φ и ε, соответственно, $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{E}$, причем выясняется роль слабо-архимедовых упорядочений.

Обозначения. В работе применяются следующие обозначения:

Символы $\bigcup$ и $\bigcap$ обозначают объединение и пересечение элементов упорядоченного множества (точнее, структуры([2])—lattice([3])), в частности, теоретико-множественные объединение (сумма) и пересечение.

$A \subseteq B$ означает, что всякий элемент множества A является элементом множества B.

$A \subset B$ означает, что A — истинное подмножество множества B.

$A \leqslant B$, где A и B — подмножества некоторого упорядоченного множества M, означает, что $x \leqslant y$, каковы бы ни были элементы $x \in A$, $y \in B$.

$A \setminus B$ обозначает множество элементов, входящих в A, но не входящих в B.

Если A, B, A^γ $(\gamma \in \Gamma)$ — подмножества линейной системы E, то:

$A + B$ — множество элементов вида $x \pm y$, где $x \in A$, $y \in B$;

$\sum\limits_{\gamma} A^\gamma$ — множество элементов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i \in A^{\gamma_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n = 1, 2, \ldots)$,

$-A$ — множество элементов $-x$, когда x пробегает A;

λA (λ — действительное число) — множество элементов вида λx, где $x \in A$. $L(A)$, $L(A, B, \ldots)$, соответственно, обозначают линейные оболочки над A и $A \bigcup B \bigcup \ldots$, т. е. минимальные линейные подсистемы в E, содержащие, соответственно, A и $A \bigcup B \bigcup \ldots$

Если x — элемент линейной системы E, то R_x — множество элементов вида λx, где $0 \leqslant \lambda < +\infty$.

D_x обозначает множество $R_x \bigcup R_{-x} = \{\lambda x; -\infty < \lambda < +\infty\}$.

Символ $[\Omega]$ в тексте означает (когда возможна неясность) что предшествующее ему выражение должно пониматься в смысле упорядочения Ω, например, «$x < y\,[\Omega]$», «элементы x и y несравнимы $[\Omega]$».

$A\,[\Omega]$ обозначает множество A с заданным в нем упорядочением Ω или же указывает на то, что A определено как подмножество множества M при помощи заданного в M упорядочения Ω.

§ 1. Упорядочения абстрактных множеств

Пусть $M = \{x, y, \ldots\}$ — какое угодно множество. Мы скажем, что задано упорядочение Ω множества M, если для некоторых пар различ-

ных элементов $x \in M$, $y \in M$ определено соотношение $x < y$, которое читается: «x меньше, чем y», удовлетворяющее условиям:

(I) *Соотношения $x < y$ и $y < x$ несовместны.*
(II) *Из $x < y$ и $y < z$ следует $x < z$.*

Запись $x > y$ (читается: «x больше, чем y» или «x превосходит y») означает то же, что и $y < x$; $x \leqslant y$ (читается «x меньше или равно y»); эквивалентная запись: $y \geqslant x$ (читается: «y больше или равно x») означает, что либо $x < y$, либо $x = y$*. Если $x \neq y$ и ни $x < y$, ни $x > y$ не имеет места, то будем говорить, что элементы x и y несравнимы (запись: $x \| y$).

Замечание 1.1. В качестве исходного можно брать соотношение $x \leqslant y$, постулировав для него:

(I_1) $x \leqslant x$;
(I_2) *если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;*
(II) *если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.*

Тогда $x < y$ означает, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$ (см. (^{1}), (^{2})).

Обозначим через $\mathfrak{S}_M$ систему всех подмножеств множества M (включая пустое множество и само M) и рассмотрим произвольное отображение M в $\mathfrak{S}_M$

$$x \to N(x) \in \mathfrak{S}_M ,$$

которое будем предполагать взаимно однозначным, т. е.

(1) *$N(x) = N(y)$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

Всякое такое отображение мы будем называть **упорядочивающей функцией**, так как оно порождает некоторое упорядочение множества Ω, если положить $x < y\,[\Omega]$ при $N(x) \subset N(y)$.

Будем при этом говорить, что упорядочивающая функция $N(x)$ **отнесена** к упорядочению Ω. Ко всякому упорядочению Ω отнесена по крайней мере одна упорядочивающая функция, именно

$$N(x) = \{x';\ x' \leqslant x\,[\Omega]\}, \tag{1.1}$$

а вместе с тем бесконечное множество упорядочивающих функций вида $N'(x) = T(N(x))$, где T — любое взаимно однозначное отображение $\mathfrak{S}_M$ самого на себя. Чтобы устранить эту неоднозначность, потребуем, чтобы упорядочивающая функция кроме свойства (1) обладала еще свойствами:

(2) *$x \in N(x)$, каков бы ни был $x \in M$;*
(3) *если $y \in N(x)$, то $N(y) \subseteq N(x)$.*

Теперь легко видеть, что *всякому упорядочению Ω оказывается отнесенной единственная упорядочивающая функция $N(x)$ со свойствами* (1), (2) *и* (3), *определяемая равенством* (1.1).

---

* Знак $=$ всюду означает *тождество* элементов и множеств.

Пусть даны два упорядочения Ω' и Ω'' множества M. Скажем, что Ω' содержится в Ω'' или Ω'' содержит Ω' (запись: $\Omega' \leqslant \Omega''$ или $\Omega'' \geqslant \Omega'$), если из $x < y[\Omega']$ непременно следует $x < y[\Omega'']$. Если $\Omega' \leqslant \Omega''$ и при этом $\Omega' \neq \Omega''$, т. е. в M найдутся такие элементы x, y, что $x < y[\Omega'']$, но $x \| y[\Omega']$, то мы записываем: $\Omega' < \Omega''$ (или $\Omega'' > \Omega'$).

Согласно данному определению, множество $\overline{\mathfrak{M}}$ всевозможных упорядочений Ω множества M само оказывается упорядоченным. Целесообразно присоединить к $\overline{\mathfrak{M}}$ пустое упорядочение, понимая под этим «упорядочение», согласно которому любые два элемента M считаются несравнимыми. Очевидно; мы вправе считать, что пустое упорядочение содержится во всяком упорядочении $\Omega \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Рассмотрим произвольную систему упорядочений $\{\Omega^\gamma\} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$ (индекс γ пробегает какое угодно множество Γ). Так как $\overline{\mathfrak{M}}$ содержит младший (наименьший) элемент, именно, пустое упорядочение, то $\{\Omega^\gamma\}$ всегда ограничено снизу в $\overline{\mathfrak{M}}$, т. е. существует упорядочение, содержащееся во всех Ω^γ. Покажем, что $\overline{\mathfrak{M}}$ содержит пересечение (или точную нижнюю границу) $\Omega^0 = \bigcap_\gamma \Omega^\gamma$ упорядочений Ω^γ. В самом деле, Ω^0 может быть определено так:

$$x < y[\Omega^0], \text{ если } x < y[\Omega^\gamma] \text{ для всех } \gamma \in \Gamma.$$

Очевидно, для всякой системы $\{\Omega^\gamma\} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$, ограниченной сверху в $\overline{\mathfrak{M}}$, т. е. такой, для которой существует упорядочение, содержащее все Ω^γ, существует объединение (или точная верхняя граница) $\Omega^1 = \bigcup_\gamma \Omega^\gamma$. Нетрудно видеть, что Ω^1 можно определить следующим образом (см. замечание (1.1)): *$x \leqslant y[\Omega^1]$, если существует конечная цепочка элементов множества M $x = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = y$ такая, что $u_{i-1} \leqslant u_i[\Omega^{\gamma_i}]$, $\gamma_i \in \Gamma$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Упорядоченные множества, содержащие пересечение (объединение) всякого своего ограниченного снизу (сверху) подмножества, называются замкнутыми([2]). Таким образом, нами получена

ТЕОРЕМА 1.1. *Совокупность $\overline{\mathfrak{M}}$ всех упорядочений произвольного множества M, упорядоченная согласно данному выше определению, есть замкнутое упорядоченное множество с младшим элементом.*

Доказательство следующей леммы, выражающей соотношение порядка и операции пересечения и объединения в $\overline{\mathfrak{M}}$ в терминах упорядочивающих функций, очевидно.

ЛЕММА 1.1. *Если упорядочивающие функции $N'(x)$ и $N''(x)$ отнесены, соответственно, к упорядочениям Ω' и Ω'', то $\Omega' \leqslant \Omega''$ эквивалентно условию: $N'(x) \subseteq N''(x)$ для всех $x \in M$.*

Пусть $\{\Omega^\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$—произвольная система упорядочений и $N^\gamma(x)$—упорядочивающая функция, отнесенная к Ω^γ. Тогда упорядочивающей функцией, отнесенной к пересечению $\Omega^0 = \bigcap_\gamma \Omega^\gamma$, является $N^0(x) = \bigcap_\gamma N^\gamma(x)$.

Обозначим через $\sigma(x_0)$, *где* $x_0 \in M$, *произвольный комплекс, состоящий из* $n+1$ *элементов* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *и* $n+1$ *упорядочений* $\Omega^{\gamma_0}, \Omega^{\gamma_1}, \ldots, \Omega^{\gamma_n}$, *для которых* $x_{i+1} \leqslant x_i\,[\Omega^{\gamma_i}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, *и пусть* $P_{\sigma(x_0)} = \bigcup_{i=0}^{n} N^{\gamma_i}(x)$.

Если система $\{\Omega^\gamma\}$ *ограничена сверху в* $\overline{\mathfrak{M}}$, *то упорядочивающей функцией, отнесенной к объединению* $\Omega^1 = \bigcup_{\gamma} \Omega^\gamma$, *будет* $N^1(x) = \bigcup_{\sigma(x)} P_{\sigma(x)}$, *где операция объединения распространена по всевозможным комплексам* $\sigma(x)$ * *при фиксированном* x.

Назовем Ω точным упорядочением множества M, если, каковы бы ни были $x \in M$, $y \in M$, непременно либо $x \leqslant y$, либо $x > y$.

Назовем упорядочение Ω максимальным, если не существует отличных от Ω упорядочений, его содержащих.

ТЕОРЕМА 1.2. *Точные упорядочения и только они максимальны. Произвольное упорядочение множества* M *можно представить как пересечение системы точных упорядочений мощности не выше мощности* M.

Предварительно докажем несколько лемм. Сейчас заметим только, что одно из утверждений теоремы очевидно: всякое точное упорядочение максимально.

ЛЕММА 1.2. *Если в системе* $\{\Omega^\gamma\} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}\,(\gamma \in \Gamma)$ *вместе с любыми двумя упорядочениями существует упорядочение, их содержащее, то система* Ω^γ *ограничена сверху в* $\overline{\mathfrak{M}}$. *При этом, если* $N^\gamma(x)$ *есть упорядочивающая функция, отнесенная к* $\Omega^\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$, *то* $N(x) = \bigcup_{\gamma} N^\gamma(x)$ *будет упорядочивающей функцией, отнесенной к объединению* $\Omega = \bigcup_{\gamma} \Omega^\gamma$.

Доказательство. Предположим, что Ω^γ удовлетворяет условию леммы, и определим упорядочение Ω следующим образом:

$$x < y\,[\Omega], \text{ если } x < y\,[\Omega^\gamma] \text{ хотя бы для одного } \gamma \in \Gamma.$$

Что такое определение действительно дает упорядочение множества M, т. е. при этом выполняются условия (I) и (II), гарантируется, как легко видеть, сделанным предположением относительно $\{\Omega^\gamma\}$. При этом, очевидно, упорядочению Ω оказывается отнесенной упорядочивающая функция $N(x) = \bigcup_{\gamma} N^\gamma(x)$, а из леммы 1.1 следует, что $\Omega = \bigcup_{\gamma} \Omega^\gamma$.

Как частный случай леммы 1.2 получается

ЛЕММА 1.3. *Всякая точно упорядоченная система упорядочений ограничена сверху.*

ЛЕММА 1.4. *Если* Ω *не является точным упорядочением, то для всяких двух элементов* $x_0 \,\|\, y_0\,[\Omega]$ *найдется такое упорядочение* $\Omega' > \Omega$, *что* $x_0 < y_0\,[\Omega']$.

Доказательство. Введем обозначение:

$$H(x) = \{x';\ x' \geqslant x\,[\Omega]\}. \tag{1.2}$$

---

* Различные $\sigma(x)$ могут отличаться друг от друга числом n, точками x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и упорядочениями Ω^{γ_i} $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Если теперь $N(x)$—упорядочивающая функция, отнесенная к Ω, то полагаем

$$N'(x)=\begin{cases} N(x)\bigcup N(x_0), & \text{если } x\in H(y_0),\\ N(x), & \text{если } x\overline{\in} H(y_0).\end{cases}$$

Легко непосредственно проверить, что $N'(x)$ упорядочивающая функция, т. е. что она обладает свойствами (1), (2), (3). Пусть Ω' порожденное ею упорядочение. В силу того, что $y_0\in H(y_0)$, а $x_0\in H(y_0)$, $N'(y_0)=$ $=N(y_0)\bigcup N(x_0)\supset N(x_0)=N'(x_0)$, т. е. $x_0<y_0[\Omega']$. Так как при этом $N'(y_0)\supseteq N(x)$ для всякого $x\in M$, то $\Omega'>\Omega$.

Замечание 1.2. Легко видеть, что построенное упорядочение будет *наименьшим* упорядочением, удовлетворяющим условиям леммы.

Замечание 1.3. Одно из утверждений теоремы 1.2 уже следует из леммы 1.4: всякое максимальное упорядочение будет точным.

Усилением леммы 1.4 служит

ЛЕММА 1.5. *Если упорядочение Ω не точное, то для любых двух элементов $x_0 | y_0[\Omega]$ найдется такое точное упорядочение $\Omega'>\Omega$, что $x_0<y_0[\Omega']$.*

Доказательство. Пусть Π—множество всевозможных пар $\pi=$ $=\{x, y\}$ несравнимых $[\Omega]$ элементов из M, которое мы предполагаем вполне упорядоченным,

$$\Pi=\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_\varkappa, \ldots\} \quad (0\leqslant\varkappa\leqslant\nu), \tag{1.3}$$

причем $\pi_0=\{x_0, y_0\}$—пара, выделенная в условии леммы.

Определяем по индукции последовательность (вообще говоря, трансфинитную) упорядочений

$$\Omega^0, \Omega^1, \ldots, \Omega^\sigma, \ldots \quad (0\leqslant\sigma<\tau), \tag{1.4}$$

положив:

1) $\Omega^0=\Omega$.

2) Пусть определены Ω^ρ для $\rho<\sigma$; если существует $\sigma-1$, то в том случае, когда $\Omega^{\sigma-1}$ есть точное упорядочение, полагаем $\Omega^\sigma=\Omega^{\sigma-1}$; в противном случае, берем первую в (1.3) пару $\pi_\varkappa\{x, y\}$, для которой $x | y[\Omega^{\sigma-1}]$, и определяем Ω^σ согласно лемме 1.4 как наименьшее упорядочение, содержащее $\Omega^{\sigma-1}$ и такое, что $x<y[\Omega^\sigma]$; если же σ—предельный индекс, то полагаем согласно лемме 1.3 $\Omega^\sigma=\bigcup\limits_{\rho<\sigma}\Omega^\rho$.

Построенная таким образом последовательность (1.4) будет возрастающей, и существующее в силу леммы 1.3 упорядочение

$$\Omega'=\bigcup_{\sigma<\tau}\Omega^\sigma$$

обладает, очевидно, требуемыми свойствами.

Доказательство теоремы 1.2. Нам остается доказать последнее утверждение теоремы. Пусть $\Omega\in\mathfrak{M}$ произвольно. Если Ω—точное упорядочение, то для него утверждение тривиально. Пусть Ω не будет

точным. Рассмотрим снова множество (1.3) пар несравнимых $[\Omega]$ элементов M. Определим, далее, множество точных упорядочений

$$\Omega^0, '\Omega^0, \Omega^1, '\Omega^1, \ldots, \Omega^\varkappa, '\Omega^\varkappa, \ldots \quad (0 \leqslant \varkappa < \nu) \tag{1.5}$$

следующим образом: $\Omega^\varkappa$ и $'\Omega^\varkappa$ суть точные упорядочения, содержащие Ω, и такие, что для пары $\pi_\varkappa = \{x, y\}$ $x < y[\Omega^\varkappa]$ и $x > y['\Omega^\varkappa]$. Существование их обеспечивается леммой 1.5. Обозначим через Ω' пересечение системы (1.5). Так как $\Omega \leqslant \Omega^\varkappa$, $\Omega \leqslant '\Omega^\varkappa$ $(0 \leqslant \varkappa < \nu)$, то $\Omega \leqslant \Omega'$. Допустим, что $x \| y[\Omega]$. Тогда x и y образуют пару $\pi \in \Pi$, которой в последовательности (1.3) приписан некоторый индекс $\varkappa$. Тогда $x < y[\Omega^\varkappa]$ и $x > y['\Omega^\varkappa]$, откуда $x \| y[\Omega']$. Следовательно, $\Omega' = \Omega$.

Так как мощность последовательности (1.5) не превосходит мощности M, то теорема полностью доказана.

Замечание 1.4. Представление Ω в виде пересечения системы точных упорядочений, вообще говоря, неоднозначно.

§ 2. Упорядочения линейных систем

Под линейной системой мы будем понимать абелеву группу $E = \{x, y, \ldots\}$ с аддитивно записанной операцией и с умножением элементов на действительные числа (обозначаемые $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ и т. д.), причем предполагаются выполненными следующие условия (см. ([4])):

1) $0 \cdot x = 0$, где 0 справа есть нулевой элемент E,
2) $1 \cdot x = x$,
3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$,
4) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
5) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$,

— каковы бы ни были элементы $x \in E$, $y \in E$ и действительные числа λ и μ.

Упорядочение Ω линейной системы E назовем линейным упорядочением, если оно связано с алгебраическими операциями в E следующими аксиомами:

АКСИОМА I. *Если $x < y$, то $x + z < y + z$, каков бы ни был элемент $z \in E$.*

АКСИОМА II. *Если $x < y$ и λ — произвольное положительное число, то $\lambda x < \lambda y$.*

Очевидна следующая

ЛЕММА 2.1. *Для того чтобы упорядочение Ω линейной системы E было линейным, необходимо и достаточно, чтобы упорядочивающая функция $N(x)$, отнесенная к Ω, обладала свойствами:*

1] $N(x + y) = x + N(y) = N(x) + y$ *для любых* $x \in E$, $y \in E$;

2] $N(\lambda x) = \lambda N(x)$ *для любых* $x \in E$ *и* $\lambda > 0$.

Из леммы 2.1 следует, в частности, что упорядочивающая функция, отнесенная к линейному упорядочению Ω, полностью определяется своим значением для какого-нибудь одного элемента E.

Фиксируя линейное упорядочение Ω, введем обозначения:

$$E^- = N(0), \quad E^+ = H(0) \quad (\text{см. } (1.2)) \tag{2.1}$$

и

$$E^0 = E \setminus (E^+ \cup E^-). \tag{2.2}$$

В силу аксиомы I

$$E^- = -E^+.$$

Согласно лемме 2.1 для любого $x \in E$

$$N(x) = x - E^+. \tag{2.3}$$

Всякий отличный от 0 элемент E^+ (соотв. E^-) будем называть **положительным** (соотв. **отрицательным**). Всякий элемент $x \in E^0$ условимся называть **нейтральным**.

Множество E^+ обладает свойствами:

1°. Если $x \in E^+$, $y \in E^+$, то $x + y \in E^+$.

2°. Если $x \in E^+$ и $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda x \in E^+$.

3°. Если $x \in E^+$ и $-x \in E^+$, то $x = 0$.

Всякое множество $C \subset E$, обладающее свойствами 1°, 2°, 3°, будем называть **коническим множеством** в E (см. ([5]), ([6])). Итак, если Ω линейное упорядочение, то $E^+[\Omega]$ — коническое множество. Обратно, для всякого конического множества $C \subset E$ существует такое линейное упорядочение Ω, что

$$C = E^+[\Omega]. \tag{2.4}$$

Оно может быть задано своей упорядочивающей функцией (см. (2.3))

$$N(x) = x - C$$

или прямо: $x \leqslant y [\Omega]$, если $y - x \in C$. Соответствие между линейными упорядочениями и коническими множествами E будем записывать

$$\Omega \sim C.$$

Обозначим через $\mathfrak{E}$ совокупность всех линейных упорядочений линейной системы E. Пустое упорядочение мы вправе, очевидно, причислить к линейным. Будучи подмножеством множества $\bar{\mathfrak{E}}$ всевозможных упорядочений E, $\mathfrak{E}$ будет упорядоченным.

ТЕОРЕМА 2.1. *$\mathfrak{E}$ есть замкнутое подмножество множества $\bar{\mathfrak{E}}$, т. е. для всякой системы линейных упорядочений $\{\Omega^\gamma\}$ пересечение $\bigcap_\gamma \Omega^\gamma$ и объединение $\bigcup_\gamma \Omega^\gamma$ (если последнее существует), взятые в $\bar{\mathfrak{E}}$, принадлежат $\mathfrak{E}$, т. е. будут линейными упорядочениями.*

Доказательство. Что касается пересечения линейных упорядочений, то оно, очевидно, линейно.

Возьмем произвольное множество линейных упорядочений $\{\Omega^\gamma\}$ ($\gamma \in \Gamma$), ограниченное сверху в $\bar{\mathfrak{E}}$. Рассмотрим $\Omega = \bigcup_\gamma \Omega^\gamma$ и покажем, что оно будет линейным упорядочением. Пусть $x \leqslant y [\Omega]$, т. е. в E существует цепочка элементов $u_0 (= x), u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n (= y)$ такая, что $u_{i-1} \leqslant u_i [\Omega^{\gamma_i}]$,

$\gamma_i \in \Gamma$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Так как все Ω^γ будут линейными упорядочениями, то при всяком $z \in E$ $u_{i-1}+z \leqslant u_i+z\,[\Omega^{\gamma_i}]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и, каково бы ни было число $\lambda > 0$, $\lambda u_{i-1} \leqslant \lambda u_i\,[\Omega^{\gamma_i}]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, откуда, согласно определению Ω, $x+z \leqslant y+z\,[\Omega]$ и $\lambda x \leqslant \lambda y\,[\Omega]$. Таким образом, для Ω выполняются аксиомы I и II. Теорема доказана.

Пусть $\Omega = \bigcup\limits_{\gamma} \Omega^\gamma$, $\Omega \sim C$, $\Omega^\gamma \sim C^\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Элементы конического множества C суть последние элементы всевозможных конечных цепочек элементов $u_0\,(=0)$, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n\,(=x)$ таких, что

$$u_{i-1} \leqslant u_i\,[\Omega^{\gamma_i}], \quad \gamma_i \in \Gamma \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Иначе,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.6}$$

где $x_i = u_i - u_{i-1} \geqslant 0\,[\Omega^{\gamma_i}]$. Обратно, если x представляется в виде (2.6) с $x_i \geqslant 0\,[\Omega^{\gamma_i}]$, то в силу линейности Ω^{γ_i} будем иметь (2.5), если положить $u_0 = 0$, $u_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$.

Объединение линейных упорядочений $\Omega^\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$ будем называть **суммой** и обозначать $\sum\limits_{\gamma} \Omega^\gamma$.

Резюмируя сказанное выше, можно высказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2.2. *Соответствие (2.4) между линейными упорядочениями и коническими множествами в E взаимно однозначно. Если $\Omega \sim C$, $\Omega' \sim C'$, то $\Omega \leqslant \Omega'$ эквивалентно $C \subseteq C'$. Если $\{\Omega^\gamma\}$ произвольная система линейных упорядочений, $\Omega^\gamma \sim C^\gamma$, $\Omega = \bigcap\limits_{\gamma} \Omega^\gamma$ и $C = \bigcap\limits_{\gamma} C^\gamma$, то $\Omega \sim C$. Система $\{\Omega^\gamma\}$ ограничена сверху в $\mathfrak{E}$ тогда и только тогда, когда существует коническое множество, содержащее все C^γ. Если это условие выполнено, то сумме $\sum\limits_{\gamma} \Omega^\gamma$ соответствует коническое множество $\sum\limits_{\gamma} C^\gamma$.*

Линейное упорядочение Ω назовем **минимальным**, если всякое линейное упорядочение, содержащееся в Ω, либо пусто, либо совпадает с Ω. Легко видеть, что линейное упорядочение минимально тогда и только тогда, когда соответствующее ему коническое множество есть луч $R_x = \{\lambda x;\ 0 \leqslant \lambda < +\infty\}$, где x—некоторый элемент E, о котором мы говорим в этом случае, что он **порождает** минимальное линейное упорядочение Ω.

Линейное упорядочение Ω назовем **максимальным**, если не существует линейных упорядочений, содержащих Ω и отличных от него.

ТЕОРЕМА 2.3. *Линейное упорядочение линейной системы E максимально тогда и только тогда, когда оно точное. Всякое линейное упорядочение может быть представлено как пересечение системы точных линейных упорядочений, мощность которой не выше мощности E.*

Доказательство ведется так же, как и доказательство аналогичной теоремы 1.2 относительно произвольных упорядочений.

Сформулируем сначала леммы, подобные леммам 1.3, 1.4 и 1.5.

ЛЕММА 2.2. *Всякая точно упорядоченная система линейных упорядочений ограничена сверху в* $\mathfrak{E}$.

ЛЕММА 2.3. *Если линейное упорядочение* Ω *не точное, то, каковы бы ни были элементы* $x_0 \mid y_0 [\Omega]$, *существует такое линейное упорядочение* $\Omega' > \Omega$, *что* $x_0 < y_0 [\Omega']$.

ЛЕММА 2.4. *Если линейное упорядочение* Ω *не будет точным, то, каковы бы ни были элементы* $x_0 \| y_0 [\Omega]$, *существует такое точное линейное упорядочение* $\Omega' > \Omega$, *что* $x_0 < y_0 [\Omega']$.

Лемма 2.2 непосредственно следует из леммы 1.3 и теоремы 2.1.

Доказательство леммы 2.3. Пусть $C = E^+ [\Omega]$. Если $z_0 = y_0 - x_0$, то $z_0 \| 0 [\Omega]$. Если мы покажем, что множество $C' = C + R_{z_0}$ коническое, то соответствующее ему линейное упорядочение Ω' будет искомым упорядочением. Свойства 1° и 2° конических множеств для C' выполняются. Допустим, что $y \in C'$ и одновременно $-y \in C'$. Тогда

$$y = x + \lambda z_0, \quad \text{где} \quad x \in C, \ \lambda \geqslant 0,$$
$$-y = x' + \lambda' z_0, \ \text{где} \ x' \in C, \ \lambda' \geqslant 0,$$

откуда

$$(x + x') + (\lambda + \lambda') z_0 = 0$$

и

$$x + x' = -(\lambda + \lambda') z_0.$$

Так как

$$x + x' \geqslant 0 [\Omega],$$

а

$$(\lambda + \lambda') z_0 \begin{cases} \| 0 [\Omega] & \text{при } \lambda + \lambda' > 0, \\ = 0 & \text{при } \lambda + \lambda' = 0, \end{cases}$$

то $\lambda + \lambda' = 0$, т. е. $\lambda = \lambda' = 0$, откуда $y = x = -x' = 0$, так как x и x' принадлежат коническому множеству C. Итак C' обладает и свойством 3°.

Доказательство леммы 2.4 и окончательный вывод теоремы 2.3 ведутся совершенно так же, как и соответствующие доказательства § 1 с той лишь разницей, что все рассматриваемые здесь упорядочения линейны.

Замечание 2.1. Представление $\Omega \in \mathfrak{E}$ в виде пересечения точных линейных упорядочений, вообще говоря, не единственно.

§ 3. Классификация линейных упорядочений. Регулярные упорядочения

В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемые линейные упорядочения удовлетворяют одной или нескольким из следующих аксиом:

АКСИОМА R. *Если для элемента* $x \in E$ *луч* R_x *ограничен сверху, но не ограничен снизу, то* $x < 0$.

АКСИОМА H*. *Для всякого элемента $x > 0$ луч R_x не ограничен сверху.*

АКСИОМА H. *Если для элемента $x \in E$ луч R_x ограничен и сверху и снизу, то $x = 0$.*

Будем для краткости записывать, что $\Omega \in \mathfrak{E}$ есть, например, Ω_H (или $\Omega_{R,H}$), если Ω удовлетворяет аксиоме H (соотв. аксиомам R и H).

Если Ω есть Ω_R, то будем говорить, что Ω — регулярное упорядочение.

Легко видеть, что аксиома H представляет собой усиление аксиомы H*. Линейное упорядочение Ω_H (Ω_{H^*}, не являющееся Ω_H) назовем однородным (соотв. слабо-однородным).

Однородное (слабо-однородное) регулярное упорядочение условимся называть архимедовым (соотв. слабоархимедовым) (см. [7]). Легко видеть, что Ω есть Ω_{R,H^*} тогда и только тогда, когда Ω удовлетворяет следующей аксиоме:

АКСИОМА A*. *Если для элемента $x \in E$ луч R_x ограничен сверху, то либо $x \leqslant 0$, либо $x \| 0$; в последнем случае R_x ограничен и снизу.*

Аналогично—следующая простая аксиома характеризует архимедовы упорядочения:

АКСИОМА A. *Если для элемента $x \in E$ луч R_x ограничен сверху, то $x \leqslant 0$.*

Замечание 3.1. Очевидно, пустое упорядочение удовлетворяет всем только что введенным аксиомам.

Назовем упорядочение собственным, если для него выполняется

АКСИОМА III. *Для любых двух элементов $x \in E$, $y \in E$ существует элемент $z \in E$ такой, что $z \geqslant x$ и $z \geqslant y$.*

Следующая лемма очевидна:

ЛЕММА 3.1. *Каждое из следующих условий характеризует собственное линейное упорядочение Ω, т. е. эквивалентно аксиоме III в предположении, что аксиомы I и II выполнены:*

[1] *Всякий элемент $x \in E$ может быть представлен в виде*

$$x = x_1 - x_2, \tag{3.1}$$

где $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0\,[\Omega]$.

[2] *Если $C = E^+[\Omega]$,* то $E = L(C)$.

Наконец, нам понадобятся еще следующие аксиомы:

АКСИОМА K*. *В E существует такой положительный элемент u, что для всякого положительного $x \in E$ $\lambda u \geqslant x$, коль скоро число $\lambda > 0$, зависящее от x, достаточно велико.*

АКСИОМА K. *Для любых двух положительных элементов $x \in E$, $y \in E$ существует число $\lambda > 0$, при котором $\lambda x \geqslant y$ и $\lambda y \geqslant x$.*

Собственное линейное упорядочение, удовлетворяющее аксиоме K*, будем называть осевым упорядочением, а элемент u — осевым элементом.

Собственное линейное упорядочение, удовлетворяющее более сильной аксиоме K, будем называть открытым упорядочением. Очевидно,

что открытое упорядочение представляет собою такое осевое упорядочение, при котором всякий положительный элемент будет осевым.

Замечание 3.2. Линейная система с осевым упорядочением содержит бесконечное множество осевых элементов: если u — осевой элемент, то всякий элемент $v > u$ также осевой.

Замечание 3.3. Если Ω — осевое упорядочение, то осевой элемент $u \in E$ может быть охарактеризован следующим свойством: *каков бы ни был элемент* $x \in E$, *найдется такое число* $\lambda > 0$ (*зависящее от* x), *что* $\lambda u \geqslant x [\Omega]$. Действительно, так как Ω — собственное линейное упорядочение, то всякий x может быть представлен в виде (3.1), и достаточно взять такое $\lambda > 0$, чтобы $\lambda u \geqslant x_1$.

Будем говорить, что E конечномерная (именно, n-мерная) линейная система, если наибольшее число линейно независимых в E элементов будет равно n. Под естественной топологией в n-мерной линейной системе E мы понимаем единственную топологию в E, относительно которой линейные операции в E непрерывны. Она может быть введена посредством метрической функции $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$, а $e_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — фиксированные линейно независимые элементы. В дальнейшем все топологические понятия — «замыкание», «внутренняя точка» и т. п. — будут пониматься в смысле естественной топологии в n-мерной линейной системе.

Пусть Ω — какое-нибудь фиксированное линейное упорядочение линейной системы E. Возьмем произвольный элемент $x \in E$ и соответствующий луч R_x. Возможны следующие случаи:

1) R_x не ограничен ни снизу, ни сверху,

2) R_x ограничен только снизу или только сверху, не будучи ограничен с другой стороны,

3) R_x ограничен сверху и снизу.

Нейтральный элемент $z \in E$ назовем соответственно элементом 1-го, 2-го или 3-го рода, если R_z обладает свойством 1), 2) или 3).

ТЕОРЕМА 3.1. *Линейное упорядочение Ω регулярно тогда и только тогда, когда всякий нейтральный элемент линейной системы $E[\Omega]$ либо 1-го, либо 3-го рода.*

Линейное упорядочение Ω, удовлетворяющее аксиоме H^*, однородно тогда и только тогда, когда всякий нейтральный элемент линейной системы $E[\Omega]$ либо 1-го, либо 2-го рода.

Линейное упорядочение Ω, удовлетворяющее аксиоме H^*, архимедово тогда и только тогда, когда все нейтральные элементы линейной системы $E[\Omega]$ 1-го рода.

Все утверждения теоремы вытекают непосредственно из соответствующих аксиом.

Введем следующие обозначения: если x и y — линейно независимые элементы E, то E_{xy} будет обозначать плоскость или двумерную подсистему E, порожденную элементами x и y, иначе говоря, линейную оболочку над x и y, состоящую из элементов вида $\lambda x+\mu y$, где λ и μ принимают независимо всевозможные действительные значения. Далее, обозначим через C_{xy} пересечение $C \bigcap E_{xy}$, где C — коническое множество в E.

Следующие леммы выясняют «геометрический» смысл свойств ограниченности лучей R_x.

ЛЕММА 3.2. *Пусть C — произвольное коническое множество в E. Если E' — конечномерная линейная подсистема E и элемент z принадлежит замыканию $\overline{C}'$ множества $C'=C \bigcap E'$ в E', то существует плоскость E_{xy}, содержащая z и такая, что z принадлежит замыканию $\overline{C}_{xy}$ множества $C_{xy}=C \bigcap E_{xy}$ в E_{xy}.*

Доказательство. Если E'' — линейная оболочка над C', то $E'' \subseteq E'$ и $z \in E''$. Коническое множество C', рассматриваемое как подмножество E'', содержит внутреннюю точку x. Тогда все точки отрезка $\overline{zx}=\{\alpha z+(1-\alpha)x;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, кроме, может быть, точки z, принадлежат C', т. е. при $0 \leqslant \alpha < 1$

$$\alpha z+(1-\alpha)x > 0. \tag{3.2}$$

Если положить, например, $y=\frac{1}{2}(x+z)$, то E_{xy} будет требуемой плоскостью.

ЛЕММА 3.3. *Пусть z — элемент линейной системы $E[\Omega]$, C — коническое множество, соответствующее линейному упорядочению Ω, тогда*

(a) *R_z ограничено снизу $[\Omega]$ тогда и только тогда, когда существуют такие линейно независимые положительные $[\Omega]$ элементы x и y, что z принадлежит замыканию конического множества C_{xy} в E_{xy}.*

(b) *R_z ограничено сверху и снизу тогда и только тогда, когда можно подобрать такие линейно независимые положительные $[\Omega]$ элементы x и y, что z принадлежит одновременно границам (в E_{xy}) множеств C_{xy} и $-C_{xy}$.*

Доказательство (a). Предположим, что $z \in \overline{C}_{xy}$, где x и y — линейно независимые элементы C, а замыкание берется в плоскости E_{xy}. Тогда все точки отрезка $\overline{zx}=\{\alpha z+(1-\alpha)x;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, кроме, может быть, точки z, принадлежат C, т. е. неравенство (3.2) справедливо для $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда будем иметь

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} z+x > 0. \tag{3.3}$$

Когда α пробегает полусегмент $[0, 1)$, $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ принимает все неотрицательные значения. Таким образом, (3.3) дает

$$R_z > -x. \tag{3.4}$$

Обратно, если R_z ограничено снизу, то для некоторого $x \in E$ имеет место (3.4). Иначе говоря,

$$\lambda z > -x$$

для $0 \leqslant \lambda < +\infty$. Полагая $\alpha = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, будем иметь (3.3), а следовательно, (3.2) для $0 \leqslant \alpha < 1$. Если взять, например, $y = \frac{1}{2}(x+z)$, то очевидно, что $z \in \overline{C}_{xy}$.

Доказательство (b). Предположим, что $x' \leqslant R_z \leqslant x''$. Применяя (а) последовательно к z и к $-z$, мы увидим, что существуют такие пары линейно независимых положительных элементов x_1, y_1 и x_2, y_2, что $z \in \overline{C}_{x_1y_1}$ и $z \in (\overline{-C_{x_2y_2}}) = -\overline{C}_{x_2y_2}$, соответственно, в плоскостях $E_{x_1y_1}$ и $E_{x_2y_2}$. Возьмем k-мерную линейную подсистему $E' = L(x_1, y_1, x_2, y_2)$, где $2 \leqslant k \leqslant 4$, и внутреннюю точку u (в E') конического множества $C' = C \cap E'$. Очевидно, мы получим требуемую плоскость E_{xy}, если положим, например, $x = u$, $y = \frac{1}{2}(u+z)$. Необходимость условия, таким образом, установлена. Достаточность следует непосредственно из утверждения (а).

ЛЕММА 3.4. *Пусть x и y — нейтральные элементы линейной системы $E[\Omega]$ и хотя бы один из лучей R_x и R_y, скажем, R_x, не ограничен сверху. Тогда, если $x+y \| 0[\Omega]$, то $x+y$ не может быть элементом 3-го рода.*

Доказательство. Допустим, что $x+y$ нейтральный элемент 3-го рода. Тогда в силу леммы 3.3

$$x+y \in \overline{C}_{uv} \cap (-\overline{C}_{uv}), \tag{3.5}$$

где u и v — некоторые линейно независимые элементы конического множества $C = E^+$. Возьмем подсистему $E' = L(x, y, u, v)$, которую можно рассматривать как k-мерное евклидово пространство $(2 \leqslant k \leqslant 4)$ с обычной нормой: если $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — фиксированный линейный базис и $x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i u_i$, то $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$. Пусть $C' = C \cap E'$. Так как $x \in E^0[\Omega]$, $y \in E^0[\Omega]$, то в силу леммы 2.3 коническое множество C' может быть погружено в коническое множество $C'' \subset E'$, содержащее x и y. Более того, C'' можно выбрать таким, чтобы x оказался внутренней точкой (в E') множества C''. В самом деле, R_x не ограничено сверху, поэтому по лемме 3.3 $x \bar{\in} (-\overline{C}_{x_1x_2})$, какова бы ни была плоскость $E_{x_1x_2}$. Следовательно, раз E' имеет конечное число измерений, x отстоит на расстоянии $2\delta > 0$ от $-C'$. Тогда сфера $S(x; \delta) = \{x'; \|x - x'\| < \delta\}$ не пересекается с $-C'$, т. е. при $\|w\| < \delta$

$$x + w \bar{\in} -C'. \tag{3.6}$$

Предположим, что y уже принадлежит C', и возьмем множество

$$C''=\bigcup_{0\leqslant\lambda<+\infty}[C'+\lambda S(x;\delta)].$$

Чтобы показать, что C'' будет коническим множеством, достаточно установить, что C'' обладает свойством 3°. Допустим, что оно нарушается, т. е. для некоторых $y_1\in C'$, $y_2\in C'$, $w_1\in E'$, $w_2\in E'$ с $\|w_1\|<\delta$, $\|w_2\|<\delta$ и $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$ с $\lambda_1+\lambda_2>0$,

$$y_1+\lambda_1(x+w_1)=-y_2-\lambda_2(x+w_2).$$

Тогда

$$x+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}w_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}w_2\right)=-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}(y_1+y_2), \tag{3.7}$$

что противоречит (3.6), так как в левой части (3.7) стоит элемент сферы $S(x;\delta)$, а в правой — элемент множества $-C'$. Итак, коническое множество C'' содержит коническое множество C' и точки x и y, причем x — внутренняя точка C''. В пространстве E' существует линейный функционал f такой, что C'' лежит в полупространстве $f\geqslant 0$. Так как x — внутренняя точка C''; то x отстоит на положительном расстоянии от гиперплоскости с уравнением $f=0$, откуда $f(x)>0$. Следовательно,

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\geqslant f(x)>0.$$

С другой стороны, f неотрицателен на множестве C'', следовательно, неотрицателен на $C_{uv}\subseteq C'\subseteq C''$ и на $\bar{C}_{uv}$, и в силу (3.5)

$$f(x+y)=0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Если Ω — минимальное линейное упорядочение, то в силу леммы 3.3 всякий элемент $z\in E^0[\Omega]$ будет 1-го рода, и тем самым Ω регулярно.

Всякое максимальное точное линейное упорядочение Ω также регулярно, так как в этом случае $E^0[\Omega]$ пусто. Следовательно, согласно результатам § 2 *всякое $\Omega\in\mathfrak{S}$ содержится хотя бы в одном регулярном линейном упорядочении*. Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 3.2. *Для всякого линейного упорядочения Ω существует наименьшее регулярное линейное упорядочение $\Omega'\geqslant\Omega$, т. е. такое, что Ω' содержится во всяком регулярном линейном упорядочении, содержащем Ω.*

Замечание 3.4. Существование такого линейного упорядочения, которое мы будем называть регулярной оболочкой над Ω, не следует прямо из существования хотя бы одного регулярного линейного упорядочения, содержащего Ω, так как пересечение регулярных упорядочений, вообще говоря, само не регулярно.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть Ω — заданное линейное упорядочение и $C=E^+[\Omega]$. Мы определяем коническое множество C', соответствующее искомому линейному упорядочению Ω', как множество, получающееся из C присоединением к C тех элементов $z\in E^0[\Omega]$, для

которых лучи R_z ограничены снизу, но не ограничены сверху. Покажем, что C' — коническое множество. Свойство 2° очевидно. Чтобы установить свойство 1°, возьмем какие-нибудь два элемента $x \in C', y \in C'$ и их сумму $z = x + y$. Согласно лемме 3.3, существуют такие пары линейно-независимых элементов $\{x_1, x_2\} \subset C$, $\{y_1, y_2\} \subset C$, что $x \in \overline{C}_{x_1 x_2}$, $y \in \overline{C}_{y_1 y_2}$ соответственно в плоскостях $E_{x_1 x_2}$ и $E_{y_1 y_2}$. Тогда z принадлежит замыканию $\overline{C}_1$ конического множества $C_1 = C \cap E_1$, где $E_1 = L(x_1, x_2)$. В силу леммы 3.2 $z \in \overline{C}_{zu}$, где $u \in C$, а замыкание берется в E_{zu}.

Следовательно, возможны два случая: 1) $z \in C$ и 2) $z \in E^0[\Omega]$, но (согласно лемме 3.3) z не является элементом 1-го рода. В первом случае $z \in C'$. Во втором случае x и y удовлетворяют условиям леммы 3.4, следовательно, z не будет элементом 3-го рода. Остается предположить, что элемент z 2-го рода, а так как R_x и R_y ограничены снизу, то R_z ограничено снизу, и $z \in C'$.

Установим теперь свойство 3°. Предположим, что существует элемент $z \neq 0$, принадлежащий $C' \cap (-C')$, т. е.

$$z \in C' \tag{3.8}$$

и

$$-z \in C'. \tag{3.9}$$

Согласно определению C' и лемме 3.3 из (3.8) и (3.9), соответственно, следует

$$R_z \geqslant v_1 [\Omega], \tag{3.10}$$

$$R_{-z} = -R_z \geqslant v_2 [\Omega], \tag{3.11}$$

где $v_1 \in E$, $v_2 \in E$. Итак,

$$v_1 \leqslant R_z \leqslant -v_2 [\Omega]. \tag{3.12}$$

В силу (3.8), (3.9) и (3.12) z нейтральный $[\Omega]$ элемент 3-го рода, что противоречит определению C'.

Итак, C' — коническое множество, соответствующее некоторому линейному упорядочению Ω'. Очевидно, $\Omega' \geqslant \Omega$.

Упорядочение Ω' регулярно. Предположим противное, т. е. что E содержит нейтральный элемент z 2-го рода $[\Omega']$. Легко видеть, что благодаря соотношению $\Omega' \geqslant \Omega$ z может быть только нейтральным элементом $[\Omega]$ и притом 1-го или 2-го рода. Не ограничивая общности, мы вправе предполагать, что луч R_z ограничен снизу $[\Omega']$. Тогда для некоторых $x_1 \in C'$, $x_2 \in C'$ в плоскости $E_{x_1 x_2}$ $z \in \overline{C}'_{x_1 x_2}$. Согласно построению C' для x_1 и x_2 можно подобрать такие пары элементов $\{x_{11}, x_{12}\} \subset C$, $\{x_{21}, x_{22}\} \subset C$, что $x_1 \in \overline{C}_{x_{11} x_{12}}$ и $x_2 \in \overline{C}_{x_{21} x_{22}}$, соответственно, в плоскостях $E_{x_{11} x_{12}}$ и $E_{x_{21} x_{22}}$. Тогда z принадлежит замыканию конического множества $C_1 = C \cap E_1$, где $E_1 = L(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ — k-мерная линейная подсистема $(2 \leqslant k \leqslant 4)$. В силу лемм 3.2 и 3.3 луч R_z ограничен снизу $[\Omega]$ и z — нейтральный элемент 2-го рода $[\Omega]$. Следовательно, $z \in C'$. Мы показали тем самым, что Ω' регулярно.

Если теперь Ω'' — произвольное регулярное линейное упорядочение, содержащее Ω, то, очевидно, всякий нейтральный элемент 2-го рода $[\Omega]$ непременно $> 0[\Omega'']$ или $< 0[\Omega'']$. Таким образом, Ω' действительно есть наименьшее регулярное линейное упорядочение, содержащее Ω.

§ 4. Архимедовы и однородные упорядочения

ТЕОРЕМА 4.1. *Пересечение любой системы и сумма конечного числа (если она существует) архимедовых упорядочений суть архимедовы упорядочения.*

Доказательство. Пусть дана система линейных упорядочений $\{\Omega^\gamma\}$ (индекс γ пробегает какое-то множество Γ), причем каждое Ω^γ есть Ω^γ_A. Рассмотрим $\Omega = \bigcap_\gamma \Omega^\gamma$. Если для некоторых элементов $x \in E$, $y \in E$

$$R_x \leqslant y\,[\Omega],$$

то, каково бы ни было $\gamma \in \Gamma$,

$$R_x \leqslant y\,[\Omega^\gamma].$$

Отсюда, в силу аксиомы А,

$$x \leqslant 0\,[\Omega^\gamma]$$

также для всех $\gamma \in \Gamma$, т. е.

$$x \leqslant 0\,[\Omega].$$

Мы видим, что аксиома А выполнена для Ω.

Предположим, что некоторое подмножество $\mathfrak{E}$, состоящее из n архимедовых упорядочений $\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^n$, ограничено сверху в $\mathfrak{E}$, и пусть $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Omega^i$. Из теоремы 3.1 и леммы 3.3 непосредственно следует, что архимедово упорядочение Ω может быть охарактеризовано следующим свойством соответствующего конического множества $C = E^+[\Omega]$: *каковы бы ни были линейно независимые элементы $x \in C$, $y \in C$, коническое множество $C_{xy} = C \cap E_{xy}$ замкнуто в E_{xy}.* Если $\Omega^i \sim C^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Omega^i \sim C$, то нетрудно убедиться, что коническое множество C обладает отмеченным свойством, если им обладают все C^i.

Пусть $\{\Omega^\gamma\}$ — произвольная система архимедовых упорядочений, а Ω' — некоторое архимедово упорядочение, содержащее все Ω^γ. Согласно теореме 4.1, среди архимедовых упорядочений Ω', содержащих все Ω^γ, существует наименьшее, именно, пересечение всех таких Ω'. Таким образом, совокупность $\mathfrak{E}_A$ архимедовых упорядочений линейной системы E оказывается замкнутым упорядоченным множеством. Но $\mathfrak{E}_A$ нельзя рассматривать как замкнутое подмножество $\mathfrak{E}$, так как точная верхняя граница системы $\{\Omega^\gamma\} \subseteq \mathfrak{E}_A$ в $\mathfrak{E}_A$ не совпадает, вообще говоря, с суммой $\sum_\gamma \Omega^\gamma$ в $\mathfrak{E}$ в том случае, когда система $\{\Omega^\gamma\}$ бесконечна. Система $\{\Omega^\gamma\}$

может быть даже не ограниченной сверху в $\mathfrak{E}_A$, будучи ограниченной сверху в $\mathfrak{E}$.

Следующая теорема устанавливает связь между архимедовыми и однородными упорядочениями.

ТЕОРЕМА 4.2. *Если $\Omega \leqslant \Omega'$ и Ω' есть Ω'_A, то упорядочение Ω однородно. Обратно, всякое однородное упорядочение Ω содержится в некотором архимедовом. Наименьшее архимедово упорядочение, содержащее заданное однородное упорядочение Ω, совпадает с регулярной оболочкой над Ω.*

Доказательство. Пусть Ω' есть Ω'_A и $\Omega \leqslant \Omega'$. Предположим, что для некоторого $x \in E$

$$y_1 \leqslant R_x \leqslant y_2 \, [\Omega],$$

где $y_1 \in E$, $y_2 \in E$. Так как $\Omega \leqslant \Omega'$, то из (4. 1) следует

$$y_1 \leqslant R_x \leqslant y_2 \, [\Omega'],$$

откуда $x = 0$, потому что линейное упорядочение Ω', будучи архимедовым, однородно. Мы видим, что Ω удовлетворяет аксиоме H.

Чтобы доказать остальные утверждения теоремы, достаточно показать, что регулярная оболочка Ω' над произвольным однородным упорядочением Ω сама однородна. Обозначим через C и C' конические множества, соответствующие линейным упорядочениям Ω и Ω'. Предположим, что E содержит такой элемент z, что луч R_z ограничен сверху и снизу $[\Omega']$. В силу леммы 3.3 $z \in \overline{C'_{xy}} \cap (-\overline{C'_{xy}})$, где x и y — некоторые линейно независимые элементы C'. Согласно построению C' (см. доказательство теоремы 3.2) $x \in \overline{C}_{x_1 x_2}$, $y \in \overline{C}_{y_1 y_2}$, где $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$ — некоторые пары линейно независимых элементов конического множества C. Беря подсистему $E_1 = L(x_1, x_2, y_1, y_2)$, будем иметь: $z \in \overline{C}_2 \cap (-\overline{C}_2)$, где C_2 — пересечение C с плоскостью, проходящей через z и какую-нибудь внутреннюю (в E_1) точку конического множества $C_1 = C \cap E_1$, и замыкание берется в этой плоскости. Следовательно, в силу леммы 3.3 R_z ограничено сверху и снизу $[\Omega]$, а так как Ω есть Ω_H, то $z = 0$. Мы видим, что линейное упорядочение Ω' также однородно, и теорема тем самым доказана.

Следствие 1. *Если $\Omega < \Omega'$ и Ω' есть Ω'_H, то Ω тоже однородно.*

Этот факт вытекает также из первой части доказательства теоремы 4.2, где используется только однородность упорядочения Ω'.

Следствие 2. *Пересечение произвольной системы однородных упорядочений однородно.*

§ 5. Открытые и осевые упорядочения

Следуя Ю. Сирвинту ([8]), мы скажем, что множество $S \subseteq E$ есть окружение элемента $x_0 \in S$ (или: S окружает x_0), если для всякого $y \in E$ можно подобрать число $\delta > 0$ (зависящее от x_0 и y) такое, что при $|\mu| < \delta$

$$x_0 + \mu y \in S. \tag{5.1}$$

S будет называться открытым окружением элемента x_0, если для всякого $y \in E$ можно подобрать числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ (зависящие от x_0 и y) такие, что (5.1) имеет место при $-\delta_1 < \mu < \delta_2$, но $x_0 - \delta_1 y \bar{\in} S$, $x_0 + \delta_2 y \bar{\in} S$.

ЛЕММА 5.1. *Собственное линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{C}$ будет осевым упорядочением тогда и только тогда, когда коническое множество $C = E^+[\Omega]$ окружает хотя бы один из своих элементов. Элементы, окруженные множеством C, и только они суть осевые элементы линейной системы $E[\Omega]$.*

Доказательство. Предположим, что Ω осевое линейное упорядочение, u — какой-нибудь осевой элемент $E[\Omega]$. Возьмем произвольный $y \in E$. Тогда (см. замечание 3.3) для $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$

$$\lambda u \geqslant y, \quad \lambda u \geqslant -y, \tag{5.2}$$

откуда, полагая $\mu = \frac{1}{\lambda}$, получим

$$u - \mu y \geqslant 0, \quad u + \mu y \geqslant 0, \tag{5.3}$$

или (5.1) при $|\mu| \leqslant \delta = \frac{1}{\lambda_0}$. Мы видим, что $E^+[\Omega]$ окружает u.

Обратно, если $E^+[\Omega]$ будет окружением элемента u, то имеет место (5.1) при $|\mu| < \delta$, где δ зависит от y. Полагая $\lambda = \frac{1}{|\mu|}$, будем иметь (5.2) при $\lambda > \frac{1}{\delta}$, откуда, так как $y \in E$ взят произвольно, следует, что u — осевой элемент.

Из только что доказанной леммы непосредственно следует

ЛЕММА 5.2. *$\Omega \in \mathfrak{C}$ есть открытое упорядочение в том и только в том случае, когда $E^+[\Omega]$ служит окружением всякого своего отличного от нуля элемента.*

Замечание 1. В леммах 5.1 и 5.2 мы, очевидно, вправе заменить коническое множество $C = E^+$ множеством *положительных* элементов $\tilde{C} = C \setminus \{0\}$.

Пусть Ω — осевое линейное упорядочение, $C = E^+[\Omega]$, u — какой-нибудь фиксированный осевой элемент. Рассмотрим элементы вида $x(\lambda) = u + \lambda y$, где $y \in E$ фиксирован. Предположим, что

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda;\ x(\lambda) \in C\} \tag{5.4}$$

— конечное число. Если

$$x(\lambda_0) = u + \lambda_0 y \in C,$$

то $x(\lambda_0)$ не будет осевым элементом, так как, очевидно, C не окружает $x(\lambda_0)$. Обозначим через $\tilde{C}'$ множество, получаемое из C удалением элементов $x(\lambda_0)$, где λ_0 определяется для некоторого $y \in E$ с помощью (5.4). Докажем, что $\tilde{C}'$ будет множеством осевых элементов линейной системы $E[\Omega]$. Всякий осевой элемент $v \in E[\Omega]$, очевидно, входит

в $\tilde{C}'$. С другой стороны, легко видеть, что $\tilde{C}'$ выпукло и является открытым окружением элемента u. Тогда в силу теоремы II из ([8]) $\tilde{C}'$ будет открытым окружением всякого своего элемента. В силу леммы 5.2 и замечания 5.1 коническое множество $C' = \tilde{C}' \cup \{0\}$ определяет некоторое открытое линейное упорядочение Ω'. Так как $\Omega' \leqslant \Omega$, то всякий положительный $[\Omega']$ элемент, иначе говоря, всякий элемент $v \in \tilde{C}'$, будучи осевым элементом для $E[\Omega']$, будет осевым элементом и для $E[\Omega]$. Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Для того чтобы $\Omega \in \mathfrak{C}$ было осевым упорядочением, необходимо и достаточно, чтобы Ω содержало некоторое открытое упорядочение. Среди открытых упорядочений, содержащихся в осевом упорядочении Ω, существует наибольшее Ω' (т. е. содержащее всякое открытое линейное упорядочение $\Omega'' \leqslant \Omega$), которое может быть определено так: $x > y\,[\Omega']$, если $x - y$ осевой элемент для E $[\Omega]$.*

Ω' будем называть **открытым ядром** осевого упорядочения Ω.

Благодаря лемме 5.2, легко доказывается следующая

ТЕОРЕМА 5.2. *Сумма произвольной ограниченной сверху системы открытых упорядочений есть открытое упорядочение. Пересечение конечного числа открытых упорядочений, если оно не пусто, является открытым упорядочением.*

Доказательство. Предположим, что система открытых упорядочений $\{\Omega^\gamma\}$ ограничена сверху в $\mathfrak{C}$. Пусть $\Omega = \sum\limits_{\gamma} \Omega^\gamma$ и $\Omega^\gamma \sim C^\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$, $\Omega \sim C$. Произвольный элемент $x \in C$ представляется в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i \in C^{\gamma_i}$, $\gamma_i \in \Gamma$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Возьмем любой $y \in E$. Тогда

$$x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu y = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{\mu}{n} y \right).$$

Так как всякое Ω^{γ_i} есть открытое линейное упорядочение, то $x_i + \frac{\mu}{n} y \in C^{\gamma_i}$ при $\left|\frac{\mu}{n}\right| < \delta_i$. Беря $|\mu| < n \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, получим

$$x_i + \frac{\mu}{n} y \in C^{\gamma_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$x + \mu y \in \sum_{i=1}^{n} C^{\gamma_i} \subseteq C.$$

Второе утверждение теоремы прямо следует из очевидного замечания, что пересечение конечного числа окружений элемента $x_0 \in E$ также окружает x_0.

§ 6. Положительные линейные функции

Действительную функцию $f(x)$, заданную на линейной системе E, назовем **линейной функцией**, если

$$f(\lambda x + \mu x) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

каковы бы ни были элементы $x \in E$, $y \in E$ и действительные числа λ и μ.

Совокупность всех линейных функций, заданных на E, которая, очевидно, сама образует линейную систему, будем обозначать через F.

ЛЕММА 6.1. *Если E' — произвольная линейная подсистема линейной системы E, а $f'(x)$ — линейная функция, заданная на E', то существует линейная функция $f(x)$ на E, совпадающая с $f'(x)$ на E'.*

ЛЕММА 6.2. *Каков бы ни был элемент $x_0 \in E$, существует линейная функция $f_0 \in F$ такая, что $f_0(x_0) = 1$.*

Обе леммы могут быть доказаны совершенно так же, как соответствующие (даже более сильные) утверждения в теории линейных функционалов в банаховых пространствах (см. ([4])).

Возьмем какое-нибудь фиксированное линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{E}$. Линейную функцию $f \in F$ назовем **положительной**, если она неотрицательна на коническом множестве $C = E^{+}[\Omega]$ и $f(x_0) > 0$ хотя бы для одного элемента $x_0 \in C$ ([6]).

Если E' — произвольная линейная подсистема E, то Ω порождает в E' некоторое линейное упорядочение Ω', так как E', будучи подмножеством упорядоченного множества, сама оказывается упорядоченной. Если $\Omega \in \mathfrak{E}$ фиксировано, то все понятия, относящиеся к E' и базирующиеся на упорядочении, будут пониматься в смысле упорядочения Ω', порождаемого упорядочением Ω.

ЛЕММА 6.3. *Пусть Ω' — осевое упорядочение линейной системы E, E' — линейная подсистема E, содержащая хотя бы один осевой элемент E. Тогда для всякой положительной линейной функции $f'(x)$, заданной на E', существует положительная линейная функция $f(x)$, заданная на E, которая на E' совпадает с $f'(x)$.*

Доказательство. Пусть $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa, \ldots\}$ $(1 \leqslant \varkappa < \nu$; ν — некоторое порядковое число) — система линейно независимых элементов E такая, что $B \subset E \setminus E'$ и $L(E', B) = E$. Определим последовательность (вообще говоря, трансфинитную) линейных подсистем в E:

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_\varkappa \subset \ldots \quad (0 \leqslant \varkappa < \nu),$$

положив:

$E_0 = E'$;

если E_ι определены для $\iota < \varkappa$, то

$$E_\varkappa = \begin{cases} L(E_{\varkappa-1}, x_\varkappa), & \text{если } \varkappa - 1 \text{ существует}, \\ \bigcup\limits_{\iota < \varkappa} E_\iota, & \text{если } \varkappa \text{ — предельный индекс.} \end{cases}$$

Для того чтобы получить требуемую линейную функцию достаточно построить последовательность положительных линейных функций f на

$E_\varkappa$ $(0 \leqslant \varkappa < \nu)$ такую, что $f_0(x) = f'(x)$ $(x \in E_0)$ и при $\iota < \varkappa$ $f_\iota(x) = f_\varkappa(x)$ на E_ι $(0 \leqslant \iota < \varkappa < \nu)$. Построим такую последовательность.

Так как открытое ядро Ω^1 осевого упорядочения Ω является собственным линейным упорядочением, то можно предположить (см. лемму 3.1), что все $x_\varkappa$ положительны $[\Omega^1]$, т. е. будут осевыми элементами.

Полагаем $f_0(x) = f'(x)$ на E_0.

Предположим, что f_ι определены для всех $\iota < \varkappa$. Если $\varkappa$ — предельное число, то $f_\varkappa$ определены на $E_\varkappa$ автоматически. Рассмотрим случай, когда существует число $\varkappa - 1$. Тогда всякий элемент $y \in E_\varkappa$ однозначно представляется в виде $y = x + \lambda x_\varkappa$, где $x \in E_{\varkappa-1}$, λ — действительное число. Обозначим через $U_\varkappa$, $V_\varkappa$ подмножества $E_{\varkappa-1}$, состоящие из положительных элементов, соответственно, меньших и больших $x_\varkappa$. $U_\varkappa$ и $V_\varkappa$ не пусты в силу сделанных выше предположений относительно B и $U_\varkappa \leqslant V_\varkappa$. Так как линейная функция $f_{\varkappa-1}$, заданная на $E_{\varkappa-1}$, положительна, то $f_{\varkappa-1}(u) \leqslant f_{\varkappa-1}(v)$, каковы бы ни были $u \in U_\varkappa$, $v \in V_\varkappa$. Следовательно, $\alpha = \sup f_{\varkappa-1}(u) \leqslant \inf f_{\varkappa-1}(v) = \beta_\varkappa$, где sup и inf берутся, соответственно, по $U_\varkappa$ и $V_\varkappa$. Определим теперь $f_\varkappa$ следующим образом: если $y \in E_\varkappa$, то $f_\varkappa(y) = f_\varkappa(x + \lambda x_\varkappa) = f_{\varkappa-1}(x) + \lambda\mu_\varkappa$, где $\mu_\varkappa$ — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $\alpha_\varkappa \leqslant \mu_\varkappa \leqslant \beta_\varkappa$. Легко видеть, что $f_\varkappa$ — положительная линейная функция на $E_\varkappa$, совпадающая с $f_{\varkappa-1}$ на $E_{\varkappa-1}$. Последовательность $\{f_\varkappa\}$ оказывается полностью определенной.

Изложенное доказательство по существу совпадает с доказательством одной теоремы, принадлежащей М. Крейну ([5]), в которой внутренние точки конуса являются осевыми элементами упорядоченного банахова пространства.

ЛЕММА 6.4. *Если $\Omega \in \mathfrak{C}$ удовлетворяет аксиоме* H*, *то, каков бы ни был элемент $u > 0\,[\Omega]$, существует осевое упорядочение $\tilde{\Omega} \geqslant \Omega$ такое, что u является осевым элементом $E[\tilde{\Omega}]$.*

Доказательство. Пусть $B = \{x_0, x_1, \ldots x_\sigma, \ldots;\ 0 \leqslant \sigma < \tau\}$ — вполне упорядоченный линейный базис в E, т. е. все x_σ (любое конечное число их) линейно независимы и $L(B) = E$. Можно предположить, что $u \bar{\in} B$. Пусть далее $B_\sigma = \{x_0, x_1, \ldots x_\rho, \ldots;\ 0 \leqslant \rho < \sigma\}$, $E'_\sigma = E_{ux_\sigma}$ и $E_\sigma = L(u, B_\sigma)$. Если $C = E^+[\Omega]$, то обозначим $C_\sigma = C \cap E_\sigma$, $C'_\sigma = C \cap E'_\sigma$.

Возьмем произвольную плоскость E'_σ. Из аксиомы H* и леммы 3.3 следует, что, каково бы ни было σ, элемент u не принадлежит границе $-C'_\sigma$ в E'_σ. Иначе говоря, возможны следующие случаи: 1) u лежит внутри C'_σ; 2) C'_σ имеет внутренние точки, но u лежит на границе C'_σ, причем в E'_σ существует нейтральный $[\Omega]$ элемент z'_σ такой, что все элементы вида $\alpha u + (1-\alpha) z'_\sigma$ при $0 \leqslant \alpha < 1$ также нейтральны $[\Omega]$; 3) C'_σ вырождается в луч R_u; в последнем случае в E'_σ существуют нейтральные элементы z'_σ и z''_σ, лежащие по разные стороны от прямой D_u.

Определим теперь индуктивно возрастающую последовательность линейных упорядочений

$$\Omega^0 \leqslant \Omega^1 \leqslant \ldots \leqslant \Omega^\sigma \leqslant \ldots \quad (0 \leqslant \sigma < \tau), \tag{6.1}$$

задав их соответствующими коническими множествами

$$C^0 \subseteq C^1 \subseteq \ldots \subseteq C^\sigma \leqslant \ldots \quad (0 \leqslant \sigma < \tau).$$

Для определения C^0 рассмотрим плоскость E_0'. Если в ней для u имеет место случай 1), то полагаем $C^0 = C_0$. Если же имеют место случаи 2) и 3), то за C^0 берем коническое множество C_0, расширенное так, чтобы к нему присоединилась точка z_0' (соотв. точки z_0' и z_0''), что возможно сделать в силу леммы 2.3. При этом, очевидно, u окажется внутренней точкой конического множества C^0 в $E_0 = E_0'$.

Допустим теперь, что определены Ω^ρ для $0 \leqslant \rho < \sigma$, причем так, что какова бы ни была плоскость $E_{uv} \subseteq E_\rho$, проходящая через u, элемент u лежит внутри конического множества $C_{uv}^\rho = C^\rho \cap E_{uv}$. Если σ — предельное число, то полагаем $\Omega^\sigma = \sum\limits_{0 \leqslant \rho < \sigma} \Omega^\rho$ (см. лемму 2.2). Если σ 1-го рода, т. е. существует $\sigma - 1$, то Ω^σ определим следующим образом: рассмотрим плоскость E_σ'; если в ней для элемента имеет место случай 1), то расширим $C_{\sigma-1}$ до конического множества, содержащего C_σ', и это расширенное коническое множество примем за C^σ; если имеют место случаи 2) или 3), то расширим $C_{\sigma-1}$ до конического множества, содержащего z_σ' (соотв. z_σ' и z_σ''), которое и примем за C^σ. Все эти расширения можно произвести двукратным применением построения, указанного в доказательстве леммы 2.3.

Покажем, что C^σ будет обладать тем же свойством, что и все C^ρ с $0 \leqslant \rho < \sigma$, т. е., какова бы ни была плоскость $E_{uv} \subseteq E_\sigma$, элемент u лежит внутри конического множества $C_{uv}^\sigma = C^\sigma \cap E_{uv}$. Для случая, когда σ — предельное число, это свойство C^σ очевидным образом сводится к соответствующему свойству предшествующих C^ρ. Если σ — число 1-го рода, то $E_{uv} \subseteq E'$, где $E' = L(E_{\rho_1}', E_{\rho_2}', \ldots, E_{\rho_n}', E_\sigma')$ — некоторая $n+1$-мерная линейная подсистема E. Наше утверждение следует непосредственно из того обстоятельства, что в порождающих E' плоскостях u лежит внутри конических множеств $C^\sigma \cap E_{\rho_k}' - C^{\sigma-1} \cap E_{\rho_k}'$ по предположению индукции и внутри $C^\sigma \cap E_\sigma'$ по построению C^σ.

Когда определены линейные упорядочения (6.1), полагаем

$$\tilde{\Omega} = \sum_{0 \leqslant \sigma < \tau} \Omega^\sigma.$$

Легко видеть из построения $\tilde{\Omega}$, что, во-первых, $\tilde{\Omega} \succ \Omega$ и, во-вторых, какова бы ни была плоскость $E_{uv} \subseteq E$, элемент u есть внутренняя (в E_{uv}) точка пересечения E_{uv} с $\tilde{C} = E^+[\tilde{\Omega}]$. Но последнее означает, что $\tilde{C}$ есть окружение элемента u, т. е. в силу леммы 5.1 u — осевой элемент $E[\tilde{\Omega}]$. Теорема доказана.

ЛЕММА 6.5. *Пусть Ω — линейное упорядочение, удовлетворяющее аксиоме* Н*, *z — произвольный нейтральный* $[\Omega]$ *элемент E 1-го рода, Ω^1 — минимальное линейное упорядочение, порожденное элементом z. Тогда линейное упорядочение $\Omega' = \Omega + \Omega^1$ удовлетворяет аксиоме* Н*.

Доказательство. Положим $C = E^+[\Omega]$ и $C' = E^+[\Omega']$. Если $x' \in C'$, то $x' = x + \lambda z$, где $x \in C$, $\lambda \geqslant 0$. Как непосредственно следует из леммы 3.3, нам достаточно показать, что множество $F \setminus (-C')$ окружает всякий элемент $x' \in C'$. Это очевидно при $x = 0$ в силу того, что элемент $z \in E^0[\Omega]$ — 1-го рода. Предположим, что для некоторого $x' = x + \lambda z$, где $x \neq 0$, множество $E \setminus (-C')$ не будет окружением. Тогда существует такой $y \in E$, что

$$x' + \mu y = x + \lambda z + \mu y = -x_1 - \lambda_1 z, \tag{6.2}$$

где $\mu > 0$ произвольно мало, а элемент $x_1 \in C$ и число $\lambda_1 \geqslant 0$ зависят от μ. Из (6.2) получим

$$x + [(\lambda + \lambda_1) z + \mu y] = -x_1. \tag{6.3}$$

Так как λ — элемент 1-го рода $[\Omega]$, то, когда μ достаточно мало,

$$\lambda z + \mu y \,\overline{\in}\, (-C)$$

и тем более

$$\lambda z + \mu \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1} y \,\overline{\in}\, (-C),$$

откуда

$$(\lambda + \lambda_1) z + \mu y = \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda} \left(\lambda z + \mu \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1} y \right) \overline{\in}\, (-C). \tag{6.4}$$

Так как $x \in C$, то согласно (6.4) левая часть равенства (6.3) не может принадлежать $-C$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если $\Omega \in \mathfrak{E}$ удовлетворяет аксиоме* Н*, *то, каков бы ни был $x_0 > 0[\Omega]$, существует такая положительная линейная функция f_0 на E, что $f_0(x_0) > 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 6.4 существует осевое упорядочение $\Omega' \geqslant \Omega$, при котором x_0 будет осевым элементом $E[\Omega']$. Возьмем на $E' = D_{x_0}$ линейную функцию f', положив $f'(\lambda x_0) = \lambda$. В силу леммы 6.3 существует линейная функция $f_0 \in F$, которая неотрицательна на $C' = E^+[\Omega']$ и $f_0(\lambda x_0) = f'(\lambda x_0) = \lambda$. Так как $C' \supseteq E^+[\Omega]$, то f_0 и будет требуемой функцией.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{E}$ удовлетворяет аксиоме* А*. *Тогда, каков бы ни был нейтральный элемент z линейной системы $E[\Omega]$, либо — в том случае, когда z 3-го рода, $f(z) = 0$ для любой положительной линейной функции f на E, либо найдутся такие положительные линейные функции f_1 и f_2, что $f_1(z) > 0$ и $f_2(z) < 0$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $z \in E^0[\Omega]$. Так как Ω есть Ω_{A^*}, то Ω регулярно, и z может быть либо 1-го, либо 3-го рода (см. теорему 3.1). Если z 3-го рода, то согласно лемме 3.3 $z \in \overline{C}_{xy} \cap (-\overline{C}_{xy})$, где x и y — некоторые линейно независимые элементы конического множества $C = E^+[\Omega]$ и, следовательно, какова бы ни была линейная функция $f \in F$, неотрицательная на C, непременно $f(z) = 0$. Если z — элемент 1-го рода, то $-z$ также 1-го рода, и так как Ω,

будучи Ω_{A^*}, будет в то же время Ω_{H^*}, то согласно лемме 6.5 существуют $\Omega' \geqslant \Omega$ и $\Omega'' \geqslant \Omega$, также удовлетворяющие аксиоме H^*, при которых $z > 0[\Omega']$, $-z > 0[\Omega'']$. Согласно теореме 6.1 существуют линейные функции $f_1 \in F$ и $f_2 \in F$, неотрицательные, соответственно, на $C' = E^+[\Omega']$ и $C'' = E^+[\Omega'']$ и такие, что $f_1(z) > 0$, $f_2(-z) = -f_2(z) > 0$. Так как $C \subset C' \bigcup C''$, то теорема доказана.

§ 7. Сопряженные линейные упорядочения

Пусть E, как обычно, обозначает некоторую линейную систему, F — систему линейных функций, заданных на E, $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$ — совокупности линейных упорядочений (соответственно) E и F.

Элементы $x_0 \in E$ и $f_0 \in F$ назовем ортогональными, если $f_0(x_0) = 0$. Будем говорить, что элемент $x_0 \in E$ ($f_0 \in F$) ортогонален к множеству $H \subseteq F$ (соотв. $D \subseteq E$), если $f(x_0) = 0$ для всякого $f \in H$ (соотв. $f_0(x) = 0$ для всякого $x \in D$).

ЛЕММА 7.1. *Ω есть собственное линейное упорядочение тогда и только тогда, когда единственной линейной функцией ортогональной к множеству $E^+[\Omega]$ является $f = 0$.*

Доказательство. Необходимость условия следует непосредственно из леммы 3.1.

Предположим, что Ω не будет собственным упорядочением. Тогда, согласно лемме 3.1, $E' = L(E^+[\Omega])$ не совпадает с E; и по лемме 6.1 существует линейная функция, исчезающая тождественно на E', но не равная нулю на всей линейной системе E. Тем самым доказана достаточность условия.

Пусть $T = \{t\}$ — какое угодно множество и $X = \{x(t)\}$ — произвольная линейная система действительных функций, заданных на T. Пусть $S = \{s\}$ — некоторое фиксированное подмножество T. Под обобщенным естественным упорядочением системы X, определенным фундаментальным подмножеством $S \subseteq T$, мы понимаем линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{X}$; определенное следующим образом ([7]): $x_1 < x_2[\Omega]$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$), если $x_1(s) \leqslant x_2(s)$ для всех $s \in S$ и $x_1(s_0) < x_2(s_0)$ хотя бы для одного $s_0 \in S$.

ЛЕММА 7.2. *Если Ω — обобщенное естественное упорядочение системы X, определенное фундаментальным подмножеством $S \subseteq T$, то Ω удовлетворяет аксиоме A^*. Ω удовлетворяет аксиоме A тогда и только тогда, когда $x = 0$ будет единственной функцией системы X, тождественно исчезающей на S.*

Доказательство. Предположим, что для некоторых функций, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$

$$\lambda x_1 \leqslant x_2[\Omega] \tag{7.1}$$

при всех $\lambda \geqslant 0$. Рассмотрим значения $x_1(s)$, принимаемые функцией x на S. Все они неположительны, так как, если бы $x_1(s_0) > 0$ для неко-

торого $s_0 \in S$, то неравенство (7.1) нарушалось бы при $\lambda > \frac{x_1(s)}{x_1(s_0)}$. Итак, $x_1(s) \leqslant 0$ для всех $s \in S$. Если $x_1(s_0) < 0$ для некоторого $s_0 \in S$, то $x_1 < 0[\Omega]$. Если $x_1(s) \equiv 0$ для всех $s \in S$, то либо $x_1 = 0$, когда $x_1(t) \equiv 0$ $(t \in T)$, либо $x_1 \parallel 0[\Omega]$, когда $x_1(t)$ не обращается тождественно в нуль на $T \setminus S$. Легко видеть, что во втором случае, каков бы ни был отрицательный $[\Omega]$ элемент $x_3 \in X$, $\lambda x_1 \geqslant x_3[\Omega]$ при любом $\lambda \geqslant 0$. Таким образом, выполняется аксиома A*. Очевидно, что Ω удовлетворяет аксиоме A тогда и только тогда, когда вторая возможность исключена, т. е. когда $x(t) \equiv 0 \cdot (t \in T)$, коль скоро x тождественно равна нулю на фундаментальном подмножестве S.

После этих предварительных рассмотрений введем следующее определение: если Ω — произвольное линейное упорядочение линейной системы E, то обобщенное естественное упорядочение $\overline{\Omega}$ линейной системы F, определяемое фундаментальным подмножеством $E^+[\Omega]$, будем называть упорядочением, сопряженным к Ω, и записывать

$$\overline{\Omega} = \varphi(\Omega).$$

Если $\overline{\Omega} = \varphi[\Omega]$, то линейные функции $f \neq 0$, принадлежащие $F^+[\overline{\Omega}]$, как раз являются *положительными* линейными функциями (при фиксированном Ω), рассмотренными в § 6.

Линейную систему E можно, очевидно, рассматривать как линейную систему функций, заданных на F, если полагать $x(f) = f(x)$, где $x \in E$ фиксировано, а f пробегает F. Всякому линейному упорядочению $\overline{\Omega} \in \mathfrak{F}$ мы ставим в соответствие некоторое линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{E}$ согласно следующему определению: линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{E}$ назовем сопряженным к $\overline{\Omega}$, если Ω есть обобщенное естественное упорядочение линейной системы $E = \{x(f)\}$ $(f \in F)$, определяемое фундаментальным подмножеством $F^+[\overline{\Omega}]$. Это соответствие будем записывать

$$\Omega = \varepsilon(\overline{\Omega}).$$

Пользуясь леммами 7.1 и 7.2, легко доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 7.1. *Если Ω — произвольное линейное упорядочение E и $\overline{\Omega} = \varphi(\Omega)$, то $\overline{\Omega}$ есть $\overline{\Omega}_{A^*}$. Для того чтобы Ω было архимедовым упорядочением, необходимо и достаточно, чтобы Ω было собственным упорядочением.*

Будем называть $\overline{\Omega} \in \mathfrak{F}$ слабо собственным упорядочением системы F, если $x = 0$ будет единственным элементом, ортогональным к $F^+[\overline{\Omega}]$.

Следующая теорема двойственна теореме 7.1 и также может быть легко получена из лемм 7.1 и 7.2.

ТЕОРЕМА 7.2. *Если $\overline{\Omega}$ — произвольное линейное упорядочение F и $\Omega = \varepsilon[\Omega]$, то Ω есть Ω_{A^*}. Для того чтобы Ω было архимедовым упо-*

рядочением, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\Omega}$ было слабо собственным упорядочением.

ТЕОРЕМА 7.3. *Если Ω' и Ω'' — собственные линейные упорядочения E и $\Omega' \leqslant \Omega''$, то $\varphi(\Omega') \geqslant \varphi(\Omega'')$.*

Доказательство. Пусть $\Omega' \sim C'$; $\Omega'' \sim C''$. Возьмем линейные упорядочения $\overline{\Omega}' = \varphi(\Omega')$ $\overline{\Omega}'' = \varphi(\Omega'')$ и соответствующие конические множества $\overline{C}'$, $\overline{C}''$ в F*. Если $f \in \overline{C}''$; то f неотрицательна на C'' и, следовательно; на C'. Если $f = 0$ то, очевидно, $f \in \overline{C}'$. Если же $f \neq 0$, то, так как по предположению Ω является собственным упорядочением, f не может быть ортогонально к C' (см. лемму 7.1), т. е. $f(x_0) > 0$ для некоторого $x_0 \in C'$. Следовательно, $f \in \overline{C}'$, что и требовалось доказать.

Подобным же образом доказывается двойственная

ТЕОРЕМА 7.4. *Если $\overline{\Omega}'$, $\overline{\Omega}''$ — слабо собственные линейные упорядочения F и $\overline{\Omega}' \leqslant \overline{\Omega}''$, то $\varepsilon(\overline{\Omega}') \geqslant \varepsilon(\overline{\Omega}'')$.*

ТЕОРЕМА 7.5. *Если линейные упорядочения $\Omega' \in \mathfrak{E}$ и $\Omega'' \in \mathfrak{E}$ удовлетворяют аксиоме A^* и $\Omega' \neq \Omega''$, то $\varphi(\Omega') \neq \varphi(\Omega'')$.*

Доказательство. Обозначим через C' и C'' конические множества, соответствующие линейным упорядочениям Ω' и Ω'', а через $\overline{\Omega}'$ и $\overline{\Omega}''$ — сопряженные к Ω' и Ω'' упорядочения. По предположению $C' \neq C''$. Пусть, например, существует некоторый элемент $x_0 \in C' \setminus C''$. Возможны два случая:

1) x_0 — элемент $E^0[\Omega'']$ 3-го рода. Тогда по теореме 6.1 x_0 ортогонален к $\overline{C}''$. С другой стороны, согласно теореме 6.2 C' содержит линейную функцию f_0, для которой $f_0(x_0) > 0$. Очевидно, $f_0 \overline{\in} \overline{C}''$.

2) x_0 либо отрицателен $[\Omega'']$, либо нейтральный элемент 1-го рода $[\Omega'']$. В силу теорем 6.1 и 6.2 можно подобрать такую линейную функцию $f_1 \in \overline{C}''$, что $f_1(x_0) < 0$. Очевидно, $f_1 \overline{\in} \overline{C}''$.

Итак, в обоих случаях $\overline{C}' \neq \overline{C}''$, что и требовалось доказать.

Линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{E}$ назовем рефлективным, если для него выполняется равенство

$$\Omega = \varepsilon(\varphi(\Omega)). \tag{7.2}$$

Аналогично, линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{F}$ назовем рефлективным, если для него выполняется двойственное равенство

$$\overline{\Omega} = \varphi(\varepsilon(\overline{\Omega})). \tag{7.3}$$

ТЕОРЕМА 7.6. *Если $\Omega \in \mathfrak{E}$ сопряжено некоторому линейному упорядочению $\overline{\Omega} \in \mathfrak{F}$, то Ω рефлективно.*

ТЕОРЕМА 7.7. *Если $\overline{\Omega} \in \mathfrak{F}$ сопряжено некоторому линейному упорядочению $\Omega \in F$, то $\ddot{\Omega}$ рефлективно.*

---

* В этом параграфе черта над обозначением множества или упорядочения означает, что последнее относится к линейной системе F.

Доказательство теоремы 7.6. Согласно предположению

$$\mathfrak{Q} = \varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}),$$

где $\overline{\mathfrak{Q}} \in \mathfrak{F}$. Полагаем

$$\overline{\mathfrak{Q}}' = \varphi(\mathfrak{Q}), \qquad \mathfrak{Q}' = \varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}').$$

Мы должны доказать, что $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$. Пусть $\mathfrak{Q} \sim C$, $\mathfrak{Q}' \sim C'$. Если $x_0 \in C$, то по определению $\overline{\mathfrak{Q}}'$ $f(x_0) \geqslant 0$ для всякой линейной функции $f \geqslant 0\,[\overline{\mathfrak{Q}}']$. Так как по теореме 7.2 $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{Q}_{A*}$; то в силу теоремы 6.1 существует такая линейная функция $f_0 > 0\,[\overline{\mathfrak{Q}}']$, что $f_0(x_0) > 0$. Мы видим, что $x_0 > 0\,[\mathfrak{Q}']$, т. е. $C \subseteq C'$ и $\mathfrak{Q} \leqslant \mathfrak{Q}'$. Предположим, что $\mathfrak{Q}' > \mathfrak{Q}$, т. е. существует элемент $x_0 \in C' \setminus C$. Так как $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{Q}_{A*}$, возможны два случая:

1) x_0 ортогонален к множеству $C' = F^+[\overline{\mathfrak{Q}}']$ или

2) $f_0(x_0) < 0$, где $f_0 \in C'$ (см. теоремы 6.1 и 6.2).

В обоих случаях x_0 неположителен в смысле линейного упорядочения $\mathfrak{Q}'$, сопряженного к $\overline{\mathfrak{Q}}'$, т. е. $x_0 \bar{\in} C'$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 7.7. Предположим, что $\overline{\mathfrak{Q}} = \varphi(\mathfrak{Q})$, где $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{E}$. Введем еще упорядочения

$$\mathfrak{Q}' = \varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}), \qquad \overline{\mathfrak{Q}}' = \varphi(\mathfrak{Q}')$$

и конические множества $\overline{C} = F^+[\overline{\mathfrak{Q}}]$, $\overline{C}' = F^+[\overline{\mathfrak{Q}}']$ в F. Очевидно, что

$$\overline{\mathfrak{Q}}' \geqslant \overline{\mathfrak{Q}}. \tag{7.4}$$

Допустим, что $\overline{\mathfrak{Q}}' > \overline{\mathfrak{Q}}$, т. е. что существует линейная функция

$$f_0 \in \overline{C}' \setminus \overline{C}. \tag{7.5}$$

Так как $\overline{\mathfrak{Q}}$ есть $\overline{\mathfrak{Q}}_{A*}$, то a priori возможны три случая:

1) $f_0 \in -\overline{C}$,

2) f_0 — нейтральный элемент F 1-го рода $[\overline{\mathfrak{Q}}]$,

3) f_0 — нейтральный элемент F 3-го рода $[\overline{\mathfrak{Q}}]$.

Первое предположение противоречит (7.4) и (7.5). Допустим, что f_0 элемент 3-го рода $[\overline{\mathfrak{Q}}]$ т. е.

$$h_1 \leqslant D_{f_0} \leqslant h_2\,[\overline{\mathfrak{Q}}], \tag{7.6}$$

где $h_i \in F$ $(i = 1, 2)$. В силу (7.4) из неравенств (7.6) вытекает

$$h_1 \leqslant D_{f_0} \leqslant h_2\,[\overline{\mathfrak{Q}}'],$$

что противоречит (7.5), потому что $\overline{\mathfrak{Q}}'$ есть $\overline{\mathfrak{Q}}'_{A*}$.

Таким образом, остается исследовать второе предположение. Возьмем двумерную плоскость $F_1 \subseteq F$, содержащую f_0 и пересекающуюся с $\overline{C}$.

Возможны два случая:

1) Для всякой такой плоскости F_1 пересечение $\bar{C}_1 = \bar{C} \cap F_1$ состоит из единственного луча R_g, где g зависит от F_1.

2) Существует плоскость F_1, содержащая два линейно независимых элемента $g_1 \in \bar{C}$, $g_2 \in \bar{C}$.

Рассмотрим первый случай. Возьмем произвольный элемент $g \in \bar{C}$ и плоскость $F_1 = L(f_0, g)$. По предположению, каково бы ни было $\lambda > 0$, $g + \lambda f_0 \| 0 [\bar{\Omega}]$, т. е. существует такой элемент $x_0 \in C$, что $(g + \lambda f_0)(x_0) = g(x_0) + \lambda f_0(x_0) < 0$. Так как $g(x_0) \geqslant 0$, то $f_0(x_0) < 0$, что противоречит выбору f_0.

Рассмотрим теперь второй случай. Возьмем плоскость F_1, содержащую линейно независимые элементы $g_1 \in \bar{C}$, $g_2 \in \bar{C}$. Так как $\bar{\Omega}$ есть Ω_{A^*} и по предположению f_0 не является элементом 3-го рода $[\bar{\Omega}]$, то мы вправе предположить, что g_1 и g_2 — граничные элементы конического множества $\bar{C}_1 = \bar{C} \cap F_1$. Представляем f_0 в виде

$$f_0 = \lambda_0 g_1 + \mu_0 g_2. \tag{7.7}$$

Так как $f_0 \| 0 [\bar{\Omega}]$, то числа λ_0 и μ_0 противоположных знаков, например, $\lambda_0 < 0$, $\mu_0 > 0$. В силу того, что g_1 и g_0 принадлежат границе (в F_1) множества $\bar{C}_1$,

$$\lambda g_1 + g_2 \begin{cases} > 0 [\Omega] \text{ при } \lambda \geqslant 0, \\ \| 0 [\Omega] \text{ при } -\delta < \lambda < 0, \\ < 0 [\Omega] \text{ при } \lambda \leqslant -\delta. \end{cases} \tag{7.8}$$

Значит, для всякого $\lambda < 0$ найдется элемент $x_0 \in C$ такой, что

$$(\lambda g_1 + g_2)(x_0) = \lambda g_1(x_0) + g_2(x_0) < 0. \tag{7.9}$$

Тогда для x_0, соответствующего значению $\lambda = \frac{\lambda_0}{\mu_0}$, будем иметь

$$f_0(x_0) = (\lambda_0 g_1 + \mu_0 g_2)(x_0) = \mu_0 (\lambda g_1 + g_2)(x_0) < 0,$$

откуда следует, что $f_0 \bar{\in} \bar{C}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 7.8. *Если линейное упорядочение $\Omega \in \mathfrak{E}$ удовлетворяет аксиоме* A*, *то Ω сопряжено некоторому линейному упорядочению $\bar{\Omega} \in \mathfrak{F}$, именно упорядочению, сопряженному Ω.*

Доказательство. Предположим, что $\Omega \in \mathfrak{E}$ есть Ω_{A^*}. Мы хотим доказать, что Ω рефлективно. Положим

$$\bar{\Omega} = \varphi(\Omega), \quad \Omega' = \varepsilon(\bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega}' = \varphi(\Omega').$$

Согласно теореме 7.7 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}'$. Если допустить, что $\Omega \neq \Omega'$, то в силу теоремы 7.5 мы имели бы $\bar{\Omega} \neq \Omega'$. Следовательно, $\Omega = \Omega' = \varepsilon(\varphi(\Omega))$, что и требовалось доказать.

Теоремы 7.2 и 7.8 утверждают эквивалентность аксиомы A* для $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{E}$ и условия $\mathfrak{Q} = \varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}})$, где $\overline{\mathfrak{Q}} \in \mathfrak{F}$. Следующая теорема устанавливает связь между упорядочениями, удовлетворяющими аксиоме A*, и упорядочениями, удовлетворяющими аксиоме H*. Эта связь подобна связи между архимедовыми и однородными упорядочениями, установленной теоремой 4.2.

ТЕОРЕМА 7.9. *Если $\mathfrak{Q} \leqslant \mathfrak{Q}'$ и $\mathfrak{Q}'$ есть $\mathfrak{Q}'_{A^*}$, то $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{Q}_{H^*}$. Обратно, если $\mathfrak{Q}$ есть $\mathfrak{Q}_{H^*}$, то существует удовлетворяющее аксиоме A* линейное упорядочение $\mathfrak{Q}' \geqslant \mathfrak{Q}$. Наименьшим из таких упорядочений будет регулярная оболочка над $\mathfrak{Q}$, которая совпадает с $\varepsilon(\varphi(\mathfrak{Q}))$.*

Мы лишь наметим доказательство последнего утверждения теоремы, полностью опустив доказательства остальных. Пусть $\mathfrak{Q}'$ — регулярная оболочка над $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'' = \varepsilon(\varphi(\mathfrak{Q}))$. В силу теоремы 7.7 $\varphi(\mathfrak{Q}'') = \varphi(\varepsilon(\varphi(\mathfrak{Q}))) = \varphi(\mathfrak{Q})$. С другой стороны, нетрудно видеть, что $\varphi(\mathfrak{Q}') = \varphi(\mathfrak{Q})$. Следовательно, $\varphi(\mathfrak{Q}') = \varphi(\mathfrak{Q}'')$, откуда согласно теоремам 7.2 и 7.5 $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}''$.

Теорема, двойственная теореме 7.8, в общем случае неверна, $\mathfrak{F}$ может содержать линейные упорядочения, удовлетворяющие аксиоме A* и не сопряженные никакому $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{E}$. Это нарушение двойственности объясняется тем, что функции вида $x(f) = f(x)$ $(x \in E,\ f \in F)$ не исчерпывают, вообще говоря, всех линейных функций на F.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ при фиксированном $x \in E$ является общим видом линейной функции, заданной на F. В этом случае $E = \{x\}$ и $F = \{f\}$ могут быть рассматриваемы как пара линейных систем, для элементов которых определено билинейное скалярное произведение (x, f), причем нуль системы E (системы F) окажется единственным элементом, ортогональным ко всей системе F (соотв. системе E). Будем говорить при этом, что E и F образуют о р т о г о н а л ь н у ю п а р у линейных систем. Обозначим, соответственно, через $\mathfrak{E}_{A^*}$ и $\mathfrak{F}_{A^*}$ подсистемы систем $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$, состоящие из линейных упорядочений, удовлетворяющих аксиоме A*. Множества архимедовых упорядочений линейных систем E и F обозначим, соответственно, через $\mathfrak{E}_A$ и $\mathfrak{F}_A$. Свойства соответствия между элементами $\mathfrak{E}_{A^*}$ и $\mathfrak{F}_{A^*}$ в рассматриваемом частном случае перечислены в следующей теореме, доказательство которой без труда может быть получено из предыдущих теорем.

ТЕОРЕМА 7.10. *Если линейные системы E и F образуют ортогональную пару, то φ есть взаимно однозначное отображение $\mathfrak{E}_{A^*}$ на $\mathfrak{F}_{A^*}$ и $\varepsilon = \varphi^{-1}$.*

$\mathfrak{Q} \in \mathfrak{E}_{A^*}$ есть собственное (архимедово) упорядочение тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathfrak{Q}) \in \mathfrak{F}_{A^*}$ есть архимедово (соотв. собственное) упорядочение.

Система собственных линейных упорядочений $\{\mathfrak{Q}^\gamma\} \subseteq \mathfrak{E}_{A^*}$ $(\{\overline{\mathfrak{Q}}^\gamma\} \subset \mathfrak{F}_{A^*})$ ограничена сверху в $\mathfrak{E}_{A^*}$ (соотв. в $\mathfrak{F}_{A^*}$) тогда и только тогда, когда пересечение системы $\{\varphi(\mathfrak{Q}^\gamma)\} \subseteq \mathfrak{F}_A$ (соотв. $\{\varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}^\gamma)\} \subseteq \mathfrak{E}_A$) не пусто. Если

это условие выполнено, то $\varepsilon(\bigcap_{\gamma}\varphi(\mathfrak{Q}^{\gamma}))$ *(соотв.* $\varphi(\bigcap_{\gamma}\varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}^{\gamma}))$ *является точной верхней границей системы* $\{\mathfrak{Q}^{\gamma}\}$ *(соотв.* $\{\overline{\mathfrak{Q}}^{\gamma}\}$*) в* $\mathfrak{E}_{A^*}$ *(соотв. в* $\mathfrak{F}_{A^*}$*).*

Для того чтобы существовало собственное линейное упорядочение $\mathfrak{Q}\in\mathfrak{E}_{A^*}$ $(\overline{\mathfrak{Q}}\in\mathfrak{F}_{A^*})$, *содержащееся во всех* $\mathfrak{Q}^{\gamma}\in\mathfrak{E}_{A^*}$ *(соотв. во всех* $\overline{\mathfrak{Q}}^{\gamma}\in\mathfrak{F}_{A^*}$*), необходимо и достаточно, чтобы система* $\{\varphi(\mathfrak{Q}^{\gamma})\}$ *(соотв.* $\{\varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}^{\gamma})\}$*) была ограничена сверху в* $\mathfrak{F}_A$ *(соотв. в* $\mathfrak{E}_A$*). Точная нижняя граница* $\mathfrak{Q}\in\mathfrak{E}_{A^*}$ $(\overline{\mathfrak{Q}}\in\mathfrak{F}_{A^*})$ *системы собственных упорядочений* $\{\mathfrak{Q}^{\gamma}\}\subset\mathfrak{E}_{A^*}$ *(соотв.* $\{\overline{\mathfrak{Q}}^{\gamma}\}\subseteq\mathfrak{F}_{A^*}$*) в* $\mathfrak{E}_{A^*}$ *(соотв. в* $\mathfrak{F}_{A^*}$*) существует и является собственным упорядочением тогда и только тогда, когда существует точная верхняя граница* $\overline{\mathfrak{Q}}'\in\mathfrak{F}_A$ *(соотв.* $\mathfrak{Q}'\in\mathfrak{E}_A$*) системы* $\{\varphi(\mathfrak{Q}^{\gamma})\}\subseteq\mathfrak{F}_A$ *(соотв.* $\{\varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}}^{\gamma})\}\subseteq\mathfrak{E}_A$*) в* $\mathfrak{F}_A$ *(соотв. в* $\mathfrak{E}_A$*). Если это условие выполнено, то* $\overline{\mathfrak{Q}}'=\varphi(\mathfrak{Q})$ *(соотв.* $\mathfrak{Q}'=\varepsilon(\overline{\mathfrak{Q}})$*).*

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
1 II 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] MacNeille H. M., Partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 416—460.

[2] Ore O., On the foundations of abstract algebra. I, Annals of Math., 36 (1935), 406—437.

[3] Birkhoff G., On the combination of subalgebras, Proc. Cambr. Phil. Soc., 29 (1933), 441—464.

[4] Banach B., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[5] Ахиезер Н., Крейн М., О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.

[6] Крейн М., Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха, Докл. Акад. Наук СССР, XXVIII (1940), 13—16.

[7] Васильков Д., Частично упорядоченные линейные системы, банаховы пространства и системы функций, Докл. Акад. Наук СССР, XXXV (1942), 148—151.

[8] Сирвинт Ю., Выпуклые множества и линейные функционалы в абстрактном пространстве. Часть I. Выпуклые множества, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 6 (1942), 143—170.

D. WASSILKOFF. ORDERINGS OF ABSTRACT SETS AND LINEAR SYSTEMS

SUMMARY

Under the ordering of a set M we understand any law that introduces a transitive relation $x<y$ between some pairs of elements $x\in M$, $y\in M$. We further say that the ordering $\mathfrak{Q}'$ of the set M is *included* in the ordering $\mathfrak{Q}''$ of the same set if the relation $x<y$ $(x\in M, y\in M)$ holds in the sense of $\mathfrak{Q}''$, whenever it holds in the sense of $\mathfrak{Q}'$. The totality $\overline{\mathfrak{M}}$ of all orderings of the set M becomes thus (partially) ordered itself. It is convenient to introduce the *void* ordering, in the sense of which the relation $x<y$ is not defined at all. The void ordering may be considered as included in any $\mathfrak{Q}\in\overline{\mathfrak{M}}$. The ordering is said to be *strict*

if for any two different elements $x \in M$, $y \in M$ either $x < y$ or $y < x$ takes place.

In § 1 the main properties of $\overline{\mathfrak{M}}$ are established:

$\overline{\mathfrak{M}}$ is a closed lattice (Theorem 1.1)*.

Every ordering $\mathfrak{L} \in \overline{\mathfrak{M}}$ is representable as the meet of a system of strict orderings, the cardinal number of which does not exceed that of M (Theorem 1.2)**.

An ordering $\mathfrak{L} \in \overline{\mathfrak{M}}$ can be determined by the mapping $x \to N(x)$ of M into the set $\mathfrak{S}_M$ of all subsets of M, where $N(x)$ consists of all elements $x' \leqslant x$ (in the sense of $\mathfrak{L}$). Such a mapping is called ordering function attached to $\mathfrak{L}$.

The mapping $x \to N(x)$ of M into $\mathfrak{S}_M$ is an ordering function if and only if

1) it is one-to-one,

2) $x \in N(x)$ for any $x \in M$,

3) $y \in N(x)$ implies $N(y) \subseteq N(x)$.

Ordering functions play an important rôle in the investigations of § 1.

Let $E = \{x, y, ...\}$ be a linear system, i. e. an Abelian group with respect to an operation $+$, for the elements of which the multiplication by real numbers is defined satisfying the usual conditions ([4]). We consider the totality $\mathfrak{E}$ of linear orderings of E, i. e. such orderings, for which the relation $x < y$ rests invariant under the addition of any element $z \in E$ both to x and y as well as under the multiplication by any positive number λ (Axioms I and II, § 2). The ordering $\mathfrak{L} \in \mathfrak{E}$ is called proper ordering if for any two elements $x \in E$, $y \in E$ there exists an element $z \in E$ such that $x \leqslant z$, $y \leqslant z$. Proper linear orderings constitute a very important class of linear orderings.

In § 2 we state some properties of $\mathfrak{E}$ analogous to those of $\overline{\mathfrak{M}}$, namely:

$\mathfrak{E}$ is a closed sublattice of $\overline{\mathfrak{E}}$ (Theorem 2.1).

Every $\mathfrak{L} \in \mathfrak{E}$ can be represented as the meet of a system of strict linear orderings, the cardinal number of which does not exceed that of E (Theorem 2.2).

The ordering function attached to a linear ordering is completely determined by its value in an arbitrary fixed element, for instance, by $N(0)$, where 0 is the null element of E. The set $C = N(0)$ possesses the following properties:

1° if $x \in C$, $y \in C$, then $x + y \in C$;

2° if $x \in C$, then $\lambda x \in C$ for every non-negative number λ;

3° if $x \in C$ and $(-x) \in C$, then $x = 0$,

i. e. C is a conic set in E ([5,6]).

In § 3 we give a rather detailed classification of linear orderings based upon the properties of boundedness of the «rays» $R_x = \{\lambda x; 0 \leqslant \lambda <$

---

* i. e. $\overline{\mathfrak{M}}$ contains the meet of every subset $\mathfrak{N} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$.

** Such a representation is in general not unique.

$<+\infty\}$ $(x \in E)$. These properties depend on the structure of the boundaries of sets of the form $C \cap E'$, where C is the conic set consisting of elements $x \geqslant 0$, and E' is an arbitrary finite-dimensional linear subsystem of E' (the boundary is taken in the corresponding E').

The linear ordering is called:

regular if for any $z \| 0$ * the ray R_z is either bounded (both above and below) or not bounded in both directions **;

homogeneous if for every $x \neq 0$ the ray R_x is not bounded (in at least one direction);

Archimedean if it is regular and homogeneous (see also ([7])).

Archimedean orderings are included in a wider class of linear orderings satisfying the following

AXIOM A*. *If R_x is bounded above, then $x \leqslant 0$ or $x \| 0$; in the latter case R_x is also bounded below.*

It is evident that $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{E}$ satisfies Axiom A* if and only if it is regular and satisfies

AXIOM H*. *If $x > 0$, then R_x is not bounded above.*

We also consider open orderings that are defined as such proper linear orderings that for any two elements $x > 0$, $y > 0$ the relations $\frac{1}{\lambda} x < y < \lambda x$ hold, whenever the number $\lambda > 0$ is sufficiently large. The ordering that includes at least one open ordering is called axial ordering (cf. ([7]), Axiom B°).

We further prove in § 3 that *for any linear ordering $\mathfrak{Q}$ there exists the least regular ordering including $\mathfrak{Q}$* — the so called regular hull over $\mathfrak{Q}$ (Theorem 3.2).

In § 4 we investigate the properties of Archimedean and homogeneous orderings with respect to the lattice operations in $\mathfrak{E}$, and establish the relation between Archimedean and homogeneous orderings:

The join (provided that it exists) of a finite number and the meet of an arbitrary set of Archimedean orderings are Archimedean orderings (Theorem 4.1).

The meet of any set of homogeneous orderings is likewise homogeneous (Corollary 2 from Theorem 4.2).

The linear ordering is homogeneous if and only if it is included in an Archimedean ordering; the regular hull over any homogeneous ordering is also homogeneous and, consequently, Archimedean (Theorem 4.2).

In § 5 we study the geometrical properties of conic sets corresponding to open and axial orderings. The following properties of open orderings are established:

---

* The symbol $x \| y$ means, as usual, that neither $x \leqslant y$ nor $y < x$ takes place.

** The set $S \subset E$ is said to be bounded above (below) if there exists an element $y \in E$ such that $x \leqslant y$ (resp. $y \leqslant x$) for any $x \in S$.

If the meet of a finite number of open orderings is not void, then it is open. The join of any system of open orderings bounded above in $\mathfrak{E}$ *is an open ordering* (Theorem 5.2).

The real function $f(x)$ defined on E is called linear function if $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$ for any real λ, μ and any elements $x \in E$, $y \in E$. Given a fixed linear ordering Ω of E, the linear function $f(x)$ is called positive linear function if $f(x) \geqslant 0$, whenever $x \geqslant 0$ (in the sense of Ω), and $f(x_0) > 0$ for at least one element $x_0 > 0$.

In § 6 we give two theorems of existence of positive linear functions — Theorems 6.1 and 6.2 — that are used in the next paragraph:

If $\Omega \in \mathfrak{E}$ *satisfies Axiom* H*, *then for any element* $x_0 > 0$ *there exists a positive linear function* $f(x)$ *on* E *such that* $f_0(x_0) > 0$.

If $\Omega \in \mathfrak{E}$ *satisfies Axiom* A*, *and* $z_0 \| 0$, *then either* $f(z_0) \equiv 0$ *for any positive linear function* $f(x)$ *on* E, *or there exist such positive linear functions* $f_1(x)$ *and* $f_2(x)$ *on* E *that* $f_1(z_0) > 0$, $f_2(z_0) < 0$.

These assertions are proved in a quite elementary way. The method used in the proof of Lemma 6.3 is due to M. Krein (5).

In § 7 besides the orderings of E the orderings $\overline{\Omega}$ of the linear system F of linear functions $f(x)$ on E are considered. To every ordering Ω of E we put in correspondence an ordering $\overline{\Omega}=\varphi(\Omega)$ of the system F that is said to be adjoint to Ω, and is defined as follows: $f_1 < f_2$ $(f_1 \in F,\ f_2 \in F)$ if $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ for all $x \geqslant 0$ (in the sense of Ω) and $f_1(x_0) < f_2(x_0)$ for at least one $x_0 > 0$. The linear ordering $\Omega=\varepsilon(\overline{\Omega})$ of the linear system E adjoint to the ordering $\overline{\Omega}$ of the system F is defined in a dual manner: $x_1 < x_2$ in the sense of Ω if $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ for every $f \geqslant 0$ (in the sense of $\overline{\Omega}$), and $f_0(x_1) < f_0(x_2)$ for at least one $f_0 > 0$. The following properties of the mappings φ and ε are established:

In order that Ω *be adjoint to an ordering* $\overline{\Omega}$ *it is necessary and sufficient that* Ω *satisfy Axiom* A*; *if this condition is fulfilled, then* 1) $\Omega=\varepsilon(\varphi(\Omega))$; 2) Ω *is Archimedean if and only if the equality* $f(x)=0$, *when valid for all* $f \geqslant 0$ *(in the sense of* $\overline{\Omega}$*), implies* $x=0$ (Theorems 7.2, 7.6 and 7.8).

If $\overline{\Omega}=\varphi(\Omega)$, *where* $\Omega \in \mathfrak{E}$ *then* 1) $\overline{\Omega}$ *satisfies Axiom* A*; 2) $\overline{\Omega}=\varphi(\varepsilon(\overline{\Omega}))$; 3) *in order that* $\overline{\Omega}$ *be Archimedean it is necessary and sufficient that the equality* $f(x)=0$, *when valid for all* $x \geqslant 0$ *(in the sense of* Ω*), imply* $f=0$; *the last condition is equivalent to that* Ω *be a proper ordering of the linear system* E (Lemma 7.1 and Theorems 7.3, 7.7).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 237—244 Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ НА КОММУТАТИВНОЙ ГРУППЕ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье дано интегральное представление положительно-определенных операторных функций на коммутативной топологической группе. Отсюда получается более простое доказательство одного результата, полученного ранее автором.

Пусть G — коммутативная топологическая группа, удовлетворяющая тем же условиям, что и в [1], и пусть каждому элементу $g \in G$ поставлен в соответствие ограниченный оператор A_g в $\mathfrak{H}$; функцию A_g мы будем называть операторной функцией на G. Операторную функцию A_g назовем положительно-определенной, если $(A_g)^* = A_{-g}$ и каковы бы ни были натуральное число m и элементы $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{H}$, $g_1, \ldots, g_m \in G$,

$$\sum_{k,\, l=1}^{m} (A_{g_k - g_l} x_k, x_l) \geqslant 0. \tag{1}$$

Функцию A_g назовем непрерывной, если $(A_g x, y)$ — непрерывная функция g при любых $x, y \in \mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА. *Всякая непрерывная положительно-определенная операторная функция A_g на G имеет представление*

$$(A_g x, y) = \int_X \chi(g)\,(B(\Delta_\chi)\,x, y), \tag{2}$$

где x, y — произвольные элементы $\mathfrak{H}$, $B(\Delta)$ — однозначно определяемая функцией A_g слабо непрерывная сверху функция, вполне аддитивная на всех борелевских множествах $\Delta \subset X$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1°. *$B(\Delta)$ — положительно-определенный эрмитовский оператор в $\mathfrak{H}$;*

2°. $B(0) = 0$, $B(X) = 1$.

Обратно, при любой функции $B(\Delta)$, удовлетворяющей условиям 1° и 2°, формула (2) задает непрерывную положительно-определенную функцию на G.

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{H}'$ всевозможных систем $x' = \{x_g, g \in G\}$, содержащих только конечное число элементов x_g, отличных от нуля. Полагая для $x' = \{x_g\}$, $y' = \{y_g\}$ и комплексного числа α

$$\alpha x' = \{\alpha x_g\}, \quad x' + y' = \{x_g + y_g\}, \quad (x', y') = \sum_{g,\, h} (A_{g-h} x_g, y_h), \tag{3}$$

мы будем иметь: $(y', x') = \overline{(x', y')}$, $(\alpha x', y') = \alpha (x', y')$, $(x' + y', z') = (x', z') + (y', z')$. Кроме того, $(x', x') \geqslant 0$ в силу (1). Отсюда следует неравенство Шварца

$$|(x', y')| \leqslant |x'|\,|y'|, \tag{4}$$

где $|x'| = \sqrt{(x', x')}$. Из (4) легко выводим, что

$$|x' + y'| \leqslant |x'| + |y'|; \tag{5}$$

кроме того,

$$|\alpha x'| = |\alpha|\,|x'|. \tag{6}$$

Назовем x' и y' эквивалентными, если $|x' - y'| = 0$. Легко видеть, что в силу (5) и (6) аксиомы эквивалентности выполнены, следовательно, $\mathfrak{H}'$ распадается на классы ξ эквивалентных между собой элементов. Совокупность этих классов обозначим через H'. Для $\xi = \{x'\}$, $\eta = \{y'\}$ полагаем

$$\xi + \eta = \{x' + y'\}, \quad \alpha\xi = \{\alpha x'\}, \quad (\xi, \eta) = (x', y'). \tag{7}$$

В силу (4), (5) и (6) эти выражения не зависят от выбора представителей x', y' классов ξ, η. Кроме того, $(\eta, \xi) = \overline{(\xi, \eta)}$, $(\alpha\xi, \eta) = \alpha(\xi, \eta)$, $(\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta)$, $(\xi, \xi) \geqslant 0$. Если $(\xi, \xi) = 0$ и $x' \in \xi$, то $(x', x') = 0$, $x' \sim 0$, $\xi = 0$. Таким образом, (ξ, η) обладает всеми свойствами скалярного произведения. Пополняя H' относительно нормы $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$, мы получим полное унитарное пространство H, в котором H' будет всюду плотно.

Определим в $\mathfrak{H}'$ оператор V_h, полагая для $x' = \{x_g\}$ $V_h x' = \{x_{g-h}\}$. Тогда

$$\{V_h x', V_h y'\} = \sum_{g,\, g'} (A_{g-g'} x_{g-h}, y_{g'-h}) =$$

$$= \sum_{g,\, g'} (A_{(g-h)-(g'-h)} x_{g-h}, y_{g'-h}) = (x', y'), \tag{8}$$

в частности

$$|V_h x'| = |x'|. \tag{9}$$

Кроме того, оператор V_h, очевидно, линеен и

$$V_0 = 1, \quad V_g V_h = V_{g+h}. \tag{10}$$

Из (9) следует, что если $x' \sim y'$, то $V_g x' \sim V_g y'$; поэтому можно определить оператор U_g в H' полагая для $\xi = \{x'\}$, $U_g \xi = \{V_g x'\}$. В силу (8)

U_g изометричен в H' и его можно продолжить до изометрического оператора U_g в H.

Из (10) следует, что $U_0=1$, $U_gU_h=U_{g+h}$; в частности, $U_gU_{-g}=$ $=U_{-g}U_g=U_0=1$, следовательно, U_g унитарен в H и $(U_g)^*=U_{-g}$. Кроме того, из определения следует, что $(U_g\xi, \eta)$ — непрерывная функция g при всех $\xi, \eta \in H'$, следовательно, в силу $|U_g|=1$, также при всех $\xi, \eta \in H$.

Итак, U_g — непрерывное унитарное представление G. Пользуясь теоремой Д. А. Райкова ([2]), легко находим, что для любых $\xi, \eta \in H$

$$(U_g\xi, \eta)=\int\limits_X \chi(g)\,(E(\Delta_\chi)\,\xi, \eta), \tag{11}$$

где $E(\Delta)$ — ортогональная спектральная функция на X в пространстве H.

Пусть теперь x, y — произвольные элементы $\mathfrak{H}$. Положим $x_0=x$, $x_g=0$ при $g\neq 0$; $y_0=y$, $y_g=0$ при $g \neq 0$, $x'=\{x_g\}$, $y'=\{y_g\}$, $\xi_x=\{x'\}$, $\eta_y=\{y'\}$. Тогда $(U_g\xi, \eta)=(V_gx', y')=(A_gx, y)$; кроме того,

$$|(E(\Delta)\,\xi_x, \eta_y)| \leqslant |\xi_x|\cdot|\eta_y| = \sqrt{(A_0x, x)\,(A_0y, y)} \leqslant |A_0|\,|x|\,|y|,$$

следовательно, мы можем положить $(E(\Delta)\,\xi_x, \eta_y)=(B(\Delta)\,x, y)$, где $B(\Delta)$ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$. Очевидно, $B(\Delta)$ удовлетворяет всем условиям, перечисленным в нашей теореме, и формула (11) при $\xi=\xi_x$, $\eta=\eta_y$ переходит в (2).

Так как, при любом $x \in \mathfrak{H}$, (A_gx, x) — непрерывная положительно-определенная числовая функция на G, то в силу теоремы 2 из ([2]) равенство $(A_gx, x)=\int\limits_X \chi(g)\,(B(\Delta_\chi)\,x, x)$ определяет $(B(\Delta)\,x, x)$, а значит, и $B(\Delta)$ единственным образом.

Обратно, если A_g задается равенством (2), то, как легко видеть, A_g — положительно-определенная операторная функция. Ее непрерывность следует из рассуждения, аналогичного приведенному в доказательстве следствия 2 из ([2]).

Следствие 1. *Всякая операторная функция $B(\Delta)$, вполне аддитивная на борелевских множествах $\Delta \in X$, слабо непрерывная сверху и удовлетворяющая условиям: (I) $B(\Delta)$ — положительно-определенный эрмитовский оператор в $\mathfrak{H}$; (II) $B(0)=0$, $B(X)=1$, может быть представлена в виде*

$$B(\Delta)\,x = P\,E(\Delta)\,x, \qquad x \in \mathfrak{H},$$

где $E(\Delta)$ — ортогональная спектральная функция на X в некотором пространстве $H \supset \mathfrak{H}$, а P — оператор проектирования в H на $\mathfrak{H}$.

Доказательство. При заданном $B(\Delta)$ равенство (2) определяет положительно-определенную непрерывную операторную функцию A_g на G, удовлетворяющую условию $A_0=1$.

Пусть H, $E(\Delta)$, ξ_x, η_y построены для A_g так же, как и в доказательстве теоремы. Тогда $(\xi_x, \eta_y)=(A_0x, y)=(x, y)$, следовательно, мы можем

отождествить ξ_x с x и рассматривать $\mathfrak{H}$ как часть H. По определению $B(\Delta)$, для всех $x, y \in \mathfrak{H}$ $(B(\Delta)x, y) = (E(\Delta)\xi_x, \eta_y) = (E(\Delta)x, y)$. Полагая $y = Pz$, $z \in H$, получим

$$(B(\Delta)x, z) = (PB(\Delta)x, z) = (B(\Delta)x, Pz) = (E(\Delta)x, Pz) = (PE(\Delta)x, z),$$

откуда $B(\Delta)x = PE(\Delta)x$.

Частный случай этого предложения для $X = (-\infty, \infty)$ был мною доказан раньше иным, более сложным путем (см. ([1]), теорема 1).

Следствие 2. *Всякую непрерывную положительно-определенную операторную функцию A_g на G, удовлетворяющую условию $A_0 = 1$, можно представить в виде $A_g x = PU_g x$, $x \in \mathfrak{H}$, где U_g — непрерывное унитарное представление G в некотором пространстве $H \supset \mathfrak{H}$, а P — оператор проектирования в H на $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Если H, U_g, ξ_x, η_y — те же, что и выше, то для $x, y \in \mathfrak{H}$: $(A_g x, y) = (U_g \xi_x, \eta_y) = (U_g x, y)$, откуда, как и выше, получаем $A_g x = PU_g x$.

Отметим, что построение H в начале доказательства теоремы можно выполнить в случае любой (и некоммутативной) группы, так что следствие 2 справедливо для любой группы.

Следствие 3. *Пусть A_t, $-\infty < t < +\infty$, — слабо непрерывная операторная функция параметра t, удовлетворяющая условиям*

$$(A_t)^* = A_{-t}, \quad \sum_{k,\, l=1}^{m} (A_{t_k - t_l} x_k, x_l) \geq 0, \tag{12}$$

каковы бы ни были натуральное число m, действительные числа $t_1, \ldots, t_m$ и элементы $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$(A_t x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, d(B(\alpha)x, y), \tag{13}$$

где $B(\alpha)$ — операторная функция, однозначно определяемая функцией A_t и удовлетворяющая условиям: $B(-\infty) = 0$, $B(+\infty) = A_0$, $B(\alpha)$ — непрерывная справа функция α, $B(\alpha_2) - B(\alpha_1)$ — положительно-определенный эрмитовский оператор при $\alpha_1 < \alpha_2$.

Обратно, при всякой такой функции $B(\alpha)$ равенство (13) *определяет слабо непрерывную операторную функцию A_t, удовлетворяющую условиям* (12).

Частным случаем этого предложения, когда $\mathfrak{H}$ одномерно, является известная теорема Бохнера ([3]).

Следствие 4. *Пусть A_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — последовательность ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая условиям:*

$$(A_n)^* = A_{-n}, \quad \sum_{k,\, l=0}^{n} (A_{k-l} x_k, x_l) \geq 0 \tag{14}$$

для любого $n=0, 1, 2, \dots$ *и любых* $x_0, \dots, x_n \in \mathfrak{H}$. *Тогда*

$$(A_n x, y) = \int_0^{2\pi} e^{in\alpha} d(B(\alpha)x, y), \qquad (15)$$

где $B(\alpha)$ — *однозначно определяемая последовательностью* A_n *операторная функция, удовлетворяющая условиям:* $B(0)=0$, $B(2\pi-0)=A_0$, $B(\alpha)$ — *слабо непрерывная справа функция* α, $B(\alpha_2)-B(\alpha_1)$ — *положительно-определенный эрмитовский оператор при* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Обратно, при всякой такой функции $B(\alpha)$ *равенство* (15) *определяет последовательность* A_n, *удовлетворяющую условиям* (14).

В самом деле, если G — аддитивная группа всех целых чисел, то характерам χ взаимно однозначно соответствуют вычеты по модулю 2π так, что $\chi_\alpha(n) = e^{i\alpha n}$.

Частный случай этого предложения, когда $\mathfrak{H}$ одномерно, содержит решение тригонометрической проблемы моментов.

Как известно, всякий ограниченный оператор A в $\mathfrak{H}$ можно представить в виде $A = H_1 + iH_2$, где $H_1 = \frac{1}{2}(A+A^*)$, $H_2 = \frac{1}{2i}(A-A^*)$ — эрмитовские операторы. Мы их назовем, соответственно, действительной и мнимой компонентами A.

Следствие 5. *Общий вид всех операторных функций* A_λ, *аналитических в круге* $|\lambda| < 1$ *и имеющих там положительно-определенную действительную компоненту, задается формулой*

$$(A_\lambda x, y) = i(Hx, y) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\alpha}+\lambda}{e^{i\alpha}-\lambda} d(\Omega(\alpha)x, y), \qquad (16)$$

где H — *произвольный эрмитовский оператор, а* $\Omega(\alpha)$ — *однозначно определяемая функцией* A_λ *и непрерывная слева операторная функция* α *такая, что* $\Omega(0)=0$, $\Omega(\alpha_2)-\Omega(\alpha_1)$ — *положительно-определенный эрмитовский оператор в* $\mathfrak{H}$ *при* $\alpha_1 < \alpha_2$.

Доказательство. Если A_λ задается формулой (16), то действительная компонента A_λ равна $\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, \frac{e^{i\alpha}+\lambda}{e^{i\alpha}-\lambda} d\Omega(\alpha)$, следовательно, есть положительно-определенный оператор, ибо $\mathrm{Re}\, \frac{e^{i\alpha}+\lambda}{e^{i\alpha}-\lambda} \geqslant 0$ при $|\lambda| < 1$.

Пусть, обратно, A_λ имеет положительно-определенную действительную компоненту. В силу аналитичности A_λ при $|\lambda| < 1$

$$A_\lambda = iH + \frac{1}{2} C_0 \lambda + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots; \qquad (17)$$

с другой стороны,

$$((A_\lambda + A_\lambda^*)x, x) \geqslant 0.$$

Подставляя сюда $y = x_0 + e^{-it}x_1 + \dots + e^{-int}x_n$, $\lambda = re^{it}$, $0 < r < 1$

и интегрируя по t от 0 до 2π, получим в силу (17)

$$\sum_{k,\, l=0}^{n} r^{k-l}(C_{k-l}x_k, x_l) \geqslant 0,$$

следовательно, при $r \to 1$,

$$\sum_{k,\, l=0}^{n} (C_{k-l}x_k, x_l) \geqslant 0.$$

В силу следствия 4 отсюда вытекает, что $(C_n x, y) = \int_0^{2\pi} e^{i\alpha n}\, d(B(\alpha)x, y)$,

откуда в силу (17)

$$(A_\lambda x, y) = i(Hx, y) + \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + e^{i\alpha}\lambda + e^{2i\alpha}\lambda^2 + \ldots\right) d(B(\alpha)x, y) =$$

$$= i(Hx, y) + \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i\alpha}\lambda}{1-e^{i\alpha}\lambda}\, d(B(\alpha)x, y) = i(Hx, y) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\alpha}+\lambda}{e^{i\alpha}-\lambda}\, d(\Omega(\alpha)x, y).$$

Единственность $\Omega(\alpha)$ следует из единственности $B(\alpha)$. Когда $\mathfrak{H}$ одномерно, следствие 5 переходит в известную теорему Herglotz'а ([4]).

Поступило
3 IV 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М. А., Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), № ?, 277—318.
[2] Райков Д. А., Докл. Акад. Наук СССР, XXVIII (1940), № 4, 296—300.
[3] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.
[4] Herglotz, Leipziger Berichte, 63 (1911).

M. NEUMARK. POSITIVE DEFINITE OPERATOR FUNCTIONS ON A COMMUTATIVE GROUP

SUMMARY

Let G be a commutative group, satisfying the same conditions, as in ([2]), and let to every $g \in G$ correspond a bounded operator A_g in $\mathfrak{H}$; A_g will be called an operator function on G. An operator function A_g will be called positive definite if $(A_g)^* = A_{-g}$ and if for any positive integer m, any $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{H}$ and $g_1, \ldots, g_m \in G$

$$\sum_{k,\, l=1}^{m} (A_{g_k - g_l} x_k, x_l) \geqslant 0. \quad (1)$$

The function A_g will be called continuous, if $(A_g x, y)$ is continuous for any $x, y \in \mathfrak{H}$.

THEOREM. *Every continuous positive definite operator function A_g on G can be represented in the form*

$$(A_g x, y) = \int_X \chi(g) (B(\Delta_\chi) x, y), \tag{2}$$

where x, y are any elements of $\mathfrak{H}$, $B(\Delta)$ is a uniquely defined by A_g weakly continuous from above set-function, completely additive on all Borel sets $\Delta \subset X$ and satisfying the following conditions:

1° $B(0) = 0$, $B(X) = A_0$;

2° *$B(\Delta)$ is a positive definite Hermitian operator in $\mathfrak{H}$ for all $\Delta \in X$ of its domain.*

Conversely, for any such function $B(\Delta)$ (2) defines a continuous positive definite operator function G.

Proof. Consider the set H' of systems $x' = \{x_g, g \in G\}$, containing only a finite number of elements x_g different from zero, and put for $x' = \{x_g\}$, $y' = \{y_g\}$ and any complex α

$$\alpha x' = \{\alpha x_g\}, \quad x' + y' = \{x_g + y_g\}, \quad (x', y')_1 = \sum_{g,h} (A_{g-h} x_g, y_h).$$

Moreover, we put $x' = y'$ if $(x' - y', x' - y')_1 = 0$. Then by (1) H' is an incomplete unitary space. By completing it we get a unitary space H. If we identify $x \in \mathfrak{H}$ with $x_g = 0$ for $g \neq l$ and $x_g = x$ for $g = l$, then $\mathfrak{H} \subset H$. If we put forther $U_h\{x_g\} = \{x_{g-h}\}$, then the U_h form a unitary representation of G in H. Hence using the Theorem of D. A. Raikov in ([1]) we easily deduce:

$$(U_g x', y')_1 = \int_X \chi(g) (E(\Delta_\chi) x', y')_1, \quad x', y' \in H;$$

particularly this holds for $x, y \in \mathfrak{H}$. But by the definition of $(x', y')_1$ and U_g: $(U_g x, y)_1 = (A_g x, y)$; thus if we put

$$(B(\Delta) x, y) = (E(\Delta) x, y)_1 \quad (x, y \in \mathfrak{H}) \tag{3}$$

we obtain the desired result.

COROLLARY. *Every weakly continuous from above operator function $B(\Delta)$ completely additive for all Borel sets $\Delta \subset X$ and satisfying* 1°, 2° *with $A_0 = 1$ can be represented in the form*

$$B(\Delta) x = PE(\Delta) x \quad (x \in \mathfrak{H}), \tag{4}$$

where $E(\Delta)$ is an orthogonal spectral function on X in an unitary space $H \supset \mathfrak{H}$ and P a projection in H into $\mathfrak{H}$ *.

Proof. If $B(\Delta)$ is given, form A_g using (2) and construct the corresponding H, U_g, and $E(\Delta)$. By $A_0 = 1$, $\mathfrak{H}$ will be a subspace of H. Hence by (3) equality (4) is valid.

If G is the additive group of all real numbers t, we get

$$(A_t x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, d\,(B(\alpha)\, x,\ y),$$

i. e. a generalisation of the well known formula of Bochner. If G is the additive group of all integers, then

$$(A_n x,\ y) = \int_{0}^{2\pi} e^{i\alpha t}\, d\,(B(\alpha)\, x,\ y),$$

i. e. we obtain the solution of the generalised trigonometric moment problem, when the «moments» are operators. This result can be used to obtain the representation

$$(A_\lambda x,\ y) = i\,(Hx,\ y) + \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\alpha} + \lambda}{e^{i\alpha} - \lambda}\, d\,(B(\alpha)\, x,\ y) \quad (H\text{—Hermitian})$$

or all operator functions A_λ analytic in the circle $|\lambda| < 1$ and satisfying there $\operatorname{Re}(A_\lambda x,\ x) \geqslant 0$. This is a generalisation of the well known formula of Herglotz ([4]).

---

* The particular case of this Corollary for $X = (-\infty, \infty)$ was already proved by the author in ([1]) (Theorem 1) using more complicated methods.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 245–249 Série mathématique

А. Н. ЧЕРКАСОВ

ФУНКЦИИ С ПОЛНОЙ СИСТЕМОЙ СТЕПЕНЕЙ

(Представлено академиком **А. Н. Колмогоровым**)

Рассматривается система конечного числа функций в замкнутой области m-мерного пространства и исследуются условия, при которых любая непрерывная в той же области функция может быть аппроксимирована с любой степенью точности многочленами от этих функций.

В замкнутой области G евклидова пространства $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ заданы функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. В дальнейшем под полиномом, расположенным по степеням функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, мы будем понимать выражение вида

$$P\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\} = \sum a_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\varphi_1^{\mu_1}\varphi_2^{\mu_2}\ldots\varphi_k^{\mu_k},$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ — целые неотрицательные числа, $a_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$ — действительные числа. В частности,

$$P\{\varphi\} = a_0 + a_1\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots + a_m[\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)]^m.$$

Будем говорить, что k функций $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ имеют полную систему степеней в области G, если для любой непрерывной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенной в той же области G, и для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такой полином $P\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$, что неравенство $|f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - P\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \ldots, \varphi_m\}| < \varepsilon$ удовлетворяется во всей области G.

Настоящая заметка имеет целью исследовать функции с точки зрения полноты их степеней. Для удобства формулировки окончательного результата введем

Определение. Предположим, что функции

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

определены и непрерывны в области G, и обозначим через $M_i(u)$ множество точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ таких, что $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = u$. Скажем, что непрерывные функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ $(m \leq k)$ в области G представляют m-мерный элемент, если, каковы бы ни были числа $u_1, u_2, \ldots, u_k$, пересечение множеств $M_1(u_1)$, $M_2(u_2), \ldots, M_k(u_k)$ или пусто, или состоит из одной точки.

Оправданием такого определения служит то, что при соблюдении указанного условия уравнения $u_i=\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ можно рассматривать как параметрические уравнения m-мерного элемента E, расположенного в k-мерном пространстве без самопересечений.

Ясно, что в случае $m=1$ будем иметь простую дугу, расположенную в k-мерном пространстве.

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы функции* $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, *определенные и непрерывные в области* G, *имели в этой области полную систему степеней, необходимо и достаточно, чтобы эти функции представляли т-мерный элемент.*

Доказательство необходимости. Пусть φ_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ имеют полную систему степеней. Докажем, что

a) пересечение множеств $M_1(u_1), M_2(u_2), \ldots, M_k(u_k)$ или пусто, или состоит из одной точки, каковы бы ни были числа $u_1, u_2, \ldots, u_k$,

b) $m \leqslant k$.

Предположим, что a) не имеет места, т. е. существуют числа $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$, для которых пересечение множеств $M_1(\overline{u}_1), M_2(\overline{u}_2), \ldots, M_k(\overline{u}_k)$ содержит две различные точки $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)$ и $(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)$. Тогда

$$\varphi_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)=\varphi_i(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m) \quad (i=1, 2, \ldots, k),$$

и для любого полинома $P\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ будем иметь:

$$P\{\varphi_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m), \ldots, \varphi_k(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)\}=$$
$$=P\{\varphi_1(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m), \ldots, \varphi_k(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)\}.$$

Возьмем непрерывную функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, подчиненную условию

$$|F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)-F(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)|=\sigma>0.$$

Положим $0<\varepsilon<\frac{\sigma}{3}$. В силу условий теоремы сможем найти такой полином $P\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$, что

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_m)-P\{\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}|<\varepsilon$$

во всей замкнутой области G. Но тогда

$$\sigma=|F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)-F(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)|=$$
$$=|F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, x_m)-P\{\varphi_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m), \ldots, \varphi_k(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)\}-$$
$$-F(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)+P\{\varphi_1(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m), \ldots, \varphi_k(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)\}|\leqslant 2\varepsilon,$$

откуда $\sigma \leqslant 2\varepsilon$; это противоречие и доказывает утверждение a).

Докажем утверждение b). Предполагая противное, именно $m>k$, получим, что m-мерная область G непрерывно отображается на область меньшего числа измерений. Поэтому найдется точка $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k)$, которой соответствуют две точки $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)$ и $(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \ldots, \overline{\overline{x}}_m)$ об-

ласти G (см. ([1]), стр. 183). А этого, как только что было доказано, быть не может. Итак, необходимость высказанных условий полностью доказана.

Доказательство достаточности. Пусть непрерывные функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, определенные в замкнутой области G, представляют m-мерный элемент E, и пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ произвольная непрерывная функция, заданная в той же области. При помощи φ_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ установлено взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками G и E, поэтому уравнение $F(u_1, u_2 \ldots, u_k)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вполне определяет непрерывную функцию F от k независимых переменных на элементе E. Как известно (([1]), стр. 133), можно найти функцию $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, определенную и непрерывную во всем пространстве $\{u_1, u_2, \ldots u_k\}$ и такую, что на элементе E выполняется равенство

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k)=F(u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

Применяя к функции $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ теорему Вейерштрасса об аппроксимировании полиномами, можно для любого числа $\varepsilon>0$ и любой замкнутой области T пространства $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, содержащей E, найти такой полином $P(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, чтобы во всей области T имело место неравенство

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k)-P(u_1, u_2, \ldots, u_k)<\varepsilon.$$

Это неравенство для точек элемента E можно переписать следующим образом:

$$|F(u_1, u_2, \ldots, u_k)-P(u_1, u_2, \ldots, u_k)|<\varepsilon.$$

Но, вспоминая определение функции $F(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ и то, что

$$u_i=\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

являются параметрическими уравнениями элемента E, последнее неравенство можно представить в виде

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_m)-P\{\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}|<\varepsilon.$$

Это неравенство имеет место для всех точек области G и, следовательно, доказывает теорему.

Отметим наиболее простой случай доказанной теоремы, именно $m=1$ и $k=1$; в этих предположениях теорема может быть сформулирована так:

Для того чтобы $\varphi(x)$, определенная и непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, имела полную систему степеней, необходимо и достаточно, чтобы она была строго монотонна.*

Укажем еще теорему, дающую достаточные условия полноты системы степеней для функций одного переменного.

---

* т. е. при $x_1<x_2$ равенство $f(x_1)=f(x_2)$ исключается.

ТЕОРЕМА 2. *Если две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными φ_1', φ_2' на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и если $\varphi_1(x)$ и $\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}$ не обращаются в нуль, то $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеют полную систему степеней.*

Доказательство. Произведем замену переменных:

$$u_1 = x_2\varphi_1(x_1), \quad u_2 = x_2\varphi_2(x_1),$$
$$a \leqslant x_1 \leqslant b, \quad 0 < x.$$

Якобиан этой системы отличен от нуля, действительно

$$\frac{D(u_1, u_2)}{D(x_1, x_2)} = -x_2 \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому указанная система локально разрешима относительно x_1 и x_2. Легко видеть, что решение будет единственным и во всей области. В самом деле, если бы паре (u_1, u_2) соответствовали две пары значений $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и $(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2)$, то для функции $\psi(x_1) = \frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)} = \frac{u_2}{u_1}$ выполнялись бы условия теоремы Ролля, и мы имели бы $\psi'(\xi) = 0$ для некоторого значения ξ между x_1 и x_2. Но $\psi'(\xi) = \left[\frac{\varphi_2'\varphi_1 - \varphi_1'\varphi_2}{\varphi_1^2}\right]_{x_1=\xi}$ в силу условий теоремы не равно нулю.

Пусть теперь $f(x)$ — любая непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция. Положим $\Phi(x_1, x_2) = x_2 f(x_1)$ и произведем замену переменных, обратную указанной выше; получим $\Phi(x_1, x_2) = F(u_1, u_2)$. Применяя к последней функции теорему Вейерштрасса, перейдем вновь к переменным x_1, x_2 и, положив $x_2 = 1$, получим доказательство теоремы.

Следствие. *Всегда существует интервал, на котором фундаментальная система решений уравнения*

$$\frac{d^ny}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)\,y = 0, \quad n \geqslant 2,$$

где $p_i(x)$ — непрерывные функции, образует систему с полной системой степеней.

Действительно, пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — фундаментальная система; для нее будем иметь

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, не нарушая общности, можно считать, что $\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \neq 0$. Кроме того, всегда можно указать интервал, на котором $\varphi_1 \neq 0$. Следовательно, на этом интервале выполнены все условия теоремы, и поэтому φ_1, φ_2

имеют полную систему степеней, а следовательно, функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ также имеют полную систему степеней.

Поступило 20 VII 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, Москва, 1937.

A. TSCHERKASSOFF. FUNCTIONS WITH COMPLETE SYSTEMS OF POWERS

SUMMARY

We say that the functions $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i=1, 2, \ldots, k$, defined on a closed domain G of the m-dimensional Euclidean space possess a complete system of powers if every continuous function $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ on G can be approximated with an arbitrary degree of accuracy by the polynomials of the form

$$\sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_k\leq n} a_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\varphi_1^{\mu_1}\varphi_2^{\mu_2}\ldots\varphi_k^{\mu_k}.$$

THEOREM. *An aggregate of continuous functions φ_i possesses a complete system of powers if and only if for any u_i the system of equations*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)=u_i, \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

has at most one solution $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$.

If the conditions of the theorem are fulfilled, then necessarily $k\geqslant m$.

Член редколлегии проф. *Б. И. Сегал*

Подписано к печати 18.II.1944 г. Л 33812
Объем 3 печ. л. 4,5 уч.-изд. л. Тираж 1200 экз. Цена 6 р. Заказ № 876

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при СНК РСФСР, Москва,
Трехпрудный пер., д. 9

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 251–252 Série mathématique

НИНА АРКАДЬЕВНА РОЗЕНСОН

1909—1942

В Пятигорске немецкими варварами убита Нина Аркадьевна Розенсон, доцент Ленинградского индустриального института, кандидат физико-математических наук.

Н. А. Розенсон родилась в 1909 г. Окончив среднюю школу, Н. А. Розенсон поступила на математический факультет Ленинградского университета, по окончании которого очень скоро приступила к самостоятельной научной работе. Ее интересы были сосредоточены на дифференциальной геометрии, главным образом в тензорном направлении методов исследования. За первую же работу в этой области она получила ученую степень кандидата физико-математических наук.

В конце тридцатых годов научные интересы Н. А. Розенсон четко определились. Они были посвящены задаче римановой геометрии, привлекавшей в то время внимание.

Как известно, каждое риманово пространство n измерений может быть погружено в евклидово пространство более высокого числа измерений. С этим связана классификация римановых пространств. Если самое низшее число измерений евклидова пространства, в которое данное риманово пространство n измерений может быть погружено, есть $n+k$, то его относят к k-му классу. С этой точки зрения наиболее простыми римановыми пространствами являются те, которые принадлежат к классу I, т. е. те пространства n измерений, которые могут быть погружены в евклидово пространство $n+1$ измерений. К числу таких пространств относятся, например, субпроективные пространства, которые исследовал пишущий эти строки. В связи с этим возникает общая задача об установлении условий, необходимых и достаточных для того, чтобы риманово пространство, определяемое метрическим тензором g_{ij}, принадлежало к классу I. Этой проблемой, главным образом, и занималась Н. А. Розенсон. Проблеме посвящены две работы, опубликованные в Известиях Академии Наук СССР.

Впервые эта проблема была поставлена Фоссом еще в 1880 г.; им было дано обобщение формул Гаусса и Кодацци на случай гиперповерхности многомерного евклидова пространства. Для нахождения условий, которым должен удовлетворять метрический тензор g_{ij} риманова пространства в том случае, когда оно принадлежит классу I, нужно исключить из формул Гаусса и Кодацци коэффициенты b_{ij} второй квадратичной фор-

мы, что наталкивается на очень большие трудности. Это видно уже из того, что первые результаты в этом направлении были получены лишь в 1935 г. Вайзе; однако, у него остался нерассмотренным некоторый особый случай, а главное, его решение не носит инвариантного характера, т.е. предполагает специфическое задание метрического тензора. В 1936 г. тот же вопрос рассматривался в работе Т. И. Томаса; в ней наиболее важным является следующий результат: если ранг второй квадратичной формы $r \geqslant 4$, то уравнения Кодацци представляют собой следствие уравнений Гаусса. Н. А. Розенсон подошла к решению задачи следующим методом. Прежде всего в случае пространств класса I для коэффициентов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ гамильтонова уравнения, которому удовлетворяет тензор b_{ij}, второй квадратичной формы, даются выражения через метрический тензор g_{ij} и через риманов тензор $R_{ib,kj}$, после чего искомый тензор b_{ij} выражается через p_1, p_2, ... p_n, g_{ij} и $R_{ij,kl}$. В этом случае получаются в инвариантной форме необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять метрический тензор риманова пространства класса I, когда ранг r тензора b_{ij} не менее 3.

Эти результаты были доложены Н. А. Розенсон в двух интересных сообщениях, сделанных в научно-исследовательском семинаре по тензорной дифференциальной геометрии при Механико-математическом факультете МГУ и затем опубликованы в Известиях Академии Наук.

Однако случай $r \leqslant 2$ в опубликованных работах Н. А. Розенсон не был исчерпан. В докладе, сделанном ею на семинаре в начале 1940 г., было изложено решение вопроса и для этого случая. Он разбивается на ряд подслучаев. Для трех из этих подслучаев условия принадлежности риманова пространства к классу I были получены в явной форме; для остальных двух случаев были намечены пути для установления таких условий. Семинар выразил желание, чтобы Н. А. Розенсон оформила все исследование в виде работы, которая могла бы быть представлена в качестве докторской диссертации. Этим она и была занята, когда разразилась война.

Мирное течение жизни, посвященной научной работе, для Н. А. Розенсон прервалось. Осенью 1941 г. на фронте погиб ее брат. Вскоре после этого при бомбардировке Ленинграда снаряд попал в дом, в котором она жила. Она была серьезно ранена, но после двухмесячного лечения несколько оправилась. Вскоре после этого погибла ее мать.

В марте 1942 г. Н. А. Розенсон была эвакуирована из Ленинграда на Кавказ и оказалась в Пятигорске, когда этот город неожиданно был захвачен немцами. Здесь вместе со многими другими жителями Пятигорска Н. А. Розенсон была убита немецкими варварами в августе 1942 г.

В. Ф. Каган

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 253–284 Série mathématique

Н. А. РОЗЕНСОН

О РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КЛАССА I

ЧАСТЬ III

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе устанавливается в тензорной форме характеристика римановых пространств I-го класса в том случае, когда ранг второго фундаментального тензора равен 2, и изучены случаи изгибания пространства.

§ 1

В работе ([1]) были даны необходимые и достаточные условия для риманова пространства класса I в том случае, когда ранг второй фундаментальной квадратичной дифференциальной формы больше двух. В настоящей статье исследуется случай, когда ранг этой формы равен двум. Заметим, что авторами работ ([2,3]) о характеристике риманова пространства класса I этот случай не рассматривался.

Пусть V_n — n-мерное риманово пространство с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\, *, \tag{1}$$

где $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — координаты точки рассматриваемого пространства и $g_{\alpha\beta}$ — функции от этих координат, непрерывные и имеющие непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно в некоторой, рассматриваемой нами, области изменения переменных.

Для того чтобы n-мерное риманово пространство с положительно определенной фундаментальной формой имело класс I, необходимо и достаточно, чтобы существовал симметричный тензор 2-го порядка $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий обобщенным уравнениям Гаусса

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma}\, ** \tag{2}$$

и Кодацци

$$\Omega_{\alpha\beta,\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma,\beta}. \tag{3}$$

Поставим дополнительное условие: ранг матрицы, составленной из $\Omega_{\alpha\beta}$ — коэффициентов второй фундаментальной квадратичной дифферен-

* Подразумевается суммирование от 1 до n по каждому значку, входящему дважды в какой-нибудь член.

** В левой части равенства (2) стоит тензор кривизны указанного риманова пространства. Согласно сделанному предположению относительно метрического тензора, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ будут непрерывными функциями от x^α, имеющими в рассматриваемой области непрерывные первые и вторые производные.

циальной формы, — должен равняться двум, т. е. должны существовать равенства

$$\begin{vmatrix} \Omega_{\alpha\beta} & \Omega_{\alpha\gamma} & \Omega_{\alpha\delta} \\ \Omega_{\lambda\beta} & \Omega_{\lambda\gamma} & \Omega_{\lambda\delta} \\ \Omega_{\mu\beta} & \Omega_{\mu\gamma} & \Omega_{\mu\delta} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

и неравенство

$$R \neq 0^{*}. \tag{5}$$

Равенства (4) выражают то свойство матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$, что ее ранг не превышает двух. Как видно из (2), неравенство (5) представляет достаточное условие для того, чтобы ранг указанной матрицы был не меньше двух. Докажем, что это условие необходимо.

Совершаем свертывание в обеих частях равенства (2) по индексам α и δ, β и γ, предварительно подняв значки γ и δ. В результате имеем

$$R = \Omega_2 - \Omega_1^2, \tag{6}$$

где $\Omega_2 = \Omega_\alpha^\gamma \Omega_\gamma^\alpha$ а $\Omega_1 = \Omega_\alpha^\alpha$. Следовательно,

$$R = -2p_2. \tag{7}$$

p_2 равняется произведению двух главных нормальных кривизн пространства, отличных от нуля. Если $R=0$, то и $p_2=0$; пространство имеет не более одной главной нормальной кривизны отличной от нуля, и ранг матрицы $\|\Omega_{\sigma\beta}\|$ не превышает единицы.

Следовательно, равенства (2), (3), (4) и неравенство (5) представляют необходимые и достаточные условия для того, чтобы n-мерное риманово пространство с положительно определенной фундаментальной квадратичной дифференциальной формой имело класс I и ранг второй фундаментальной квадратичной дифференциальной формы равнялся двум.

§ 2

Поставим теперь следующую задачу. Предположим, что составляющие некоторого симметричного тензора 2-го порядка $\Omega_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям Гаусса, причем ранг матрицы $\|\Omega_{\sigma\beta}$ равен двум. В таком случае справедливы уравнения (4) и неравенство (5). Об условиях, которые должны быть наложены на тензор кривизны для того, чтобы существовал тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий уравнениям (2), будет сказано дальше. Требуется получить необходимые и достаточные условия для существования равенств Кодацци в виде алгебраических уравнений относительно составляющих тензора $\Omega_{\alpha\beta}$.

Из (2) и (4) следуют уравнения

$$\Omega_{\alpha\beta} R_{\lambda\mu\gamma\delta} + \Omega_{\alpha\gamma} R_{\lambda\mu\delta\beta} + \Omega_{\alpha\delta} R_{\lambda\mu\beta\gamma} = 0. \tag{8}$$

Дифференцируем обе части равенства (8) по x^ν (здесь и в дальнейшем подразумевается ковариантное дифференцирование)

---

* $R - R_{\alpha\beta}{}^{\beta\alpha}$. Значки здесь и в дальнейшем подняты посредством контравариантного метрического тензора $g_{\alpha\beta}$.

$$\Omega_{\alpha\beta,\nu}R_{\lambda\mu\gamma\delta}+\Omega_{\alpha\gamma,\nu}R_{\lambda\mu\delta\beta}+\Omega_{\alpha\delta,\nu}R_{\lambda\mu\beta\gamma}+$$
$$+\Omega_{\alpha\beta}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\delta}+\Omega_{\alpha\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\nu}+\Omega_{\alpha\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\nu}=0. \qquad (9)$$

Переставляя значки α и ν, получаем:

$$\Omega_{\nu\beta,\alpha}R_{\lambda\mu\gamma\delta}+\Omega_{\nu\gamma,\alpha}R_{\lambda\mu\delta\beta}+\Omega_{\nu\delta,\alpha}R_{\lambda\mu\beta\gamma}+\Omega_{\nu\beta}R_{\lambda\mu\nu\delta,\alpha}+\Omega_{\nu\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\alpha}+\Omega_{\nu\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\alpha}=0.$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего и вводя обозначение

$$\Omega_{\alpha\beta,\nu}-\Omega_{\nu\beta,\alpha}=\Phi_{\beta\alpha\nu}, \qquad (10)$$

находим

$$\Phi_{\beta\alpha\nu}R_{\lambda\mu\gamma\delta}+\Phi_{\gamma\alpha\nu}R_{\lambda\mu\delta\beta}+\Phi_{\delta\alpha\nu}R_{\lambda\mu\beta\gamma}+$$
$$+\Omega_{\alpha\beta}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\nu}+\Omega_{\alpha\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\nu}+\Omega_{\alpha\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\nu}-$$
$$-\Omega_{\nu\beta}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\alpha}-\Omega_{\nu\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\alpha}-\Omega_{\nu\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\alpha}=0. \qquad (11)$$

Начнем с вывода необходимых условий. Предположим, что уравнения Кодацци удовлетворяются. На основании (3) заключаем, что

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}=0 \qquad (12)$$

при всех значениях индексов α, β, γ. Следовательно, коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\Omega_{\alpha\beta}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\nu}+\Omega_{\alpha\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\nu}+\Omega_{\alpha\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\nu}-$$
$$-\Omega_{\nu\beta}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\alpha}-\Omega_{\nu\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\alpha}-\Omega_{\nu\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\alpha}=0. \qquad (13)$$

Итак, уравнения (13) представляют необходимые условия для того, чтобы удовлетворялись равенства Кодацци. Наоборот, если эти условия выполнены, то справедливы уравнения

$$\Phi_{\beta\alpha\nu}R_{\lambda\mu\gamma\delta}+\Phi_{\gamma\alpha\nu}R_{\lambda\mu\delta\beta}+\Phi_{\delta\alpha\nu}R_{\lambda\mu\beta\gamma}=0. \qquad (14)$$

Из этих равенств не следуют еще уравнения (12). Это можно заметить, приведя в соответствие некоторой точке пространства такую систему координат, что в этой точке и в этой системе $g^{\alpha\beta}=0$, если $\alpha\neq\beta$, $g^{11}=g^{22}=\ldots=g^{nn}=1$; $\Omega_{\alpha\beta}=0$, если $\alpha\neq\beta$. Будем в дальнейшем обозначать составляющие $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ тензора в данной точке относительно соответствующей системы координат через $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$. Так как ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ равен двум, то можно считать, что $\overline{\Omega}_{33}=\ldots=\Omega_{nn}=0$. На основании (2) заключаем, что $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$, если хоть один из значков α, β, γ, δ больше двух. В таком случае из (14) следует, что $\overline{\Phi}_{\delta\alpha\nu}\overline{R}_{\lambda\mu\beta\gamma}=0$, если $\delta>2$. Полагая $\lambda=\beta=1$, $\mu=\gamma=2$, имеем

$$\overline{\Phi}_{\delta\alpha\nu}=0, \qquad (15)$$

при $\delta>2$ и любых α и ν. На основании очевидных равенств

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}+\Phi_{\beta\gamma\alpha}+\Phi_{\gamma\alpha\beta}=0 \qquad (16)$$

мы можем заключить, что $\overline{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}=0$ в том случае, когда по крайней мере два из значков α, β, γ больше двух. Нам нужно получить условия, при которых $\overline{\Phi}_{11\sigma}$, $\overline{\Phi}_{22\sigma}$, $\overline{\Phi}_{12\sigma}=\overline{\Phi}_{21\sigma}$ $(\sigma>2)$ *, $\overline{\Phi}_{112}$, $\overline{\Phi}_{221}$ равны нулю

* Это равенство вытекает из соотношений (15) и (16).

С этой целью докажем, что тензор $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяет равенствам

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma,\delta}+\Phi_{\alpha\gamma\delta,\beta}+\Phi_{\alpha\delta\beta,\gamma}=0 \ *. \tag{17}$$

Преобразуем левую часть (17). Она равна

$$\begin{aligned}&\Omega_{\alpha\beta,\gamma,\delta}-\Omega_{\alpha\gamma,\beta,\delta}+\Omega_{\alpha\gamma,\delta,\beta}-\Omega_{\alpha\delta,\gamma,\beta}+\Omega_{\alpha\delta,\beta,\gamma}-\Omega_{\alpha\beta,\delta,\gamma}=\\&=(\Omega_{\alpha\beta,\gamma,\delta}-\Omega_{\alpha\beta,\delta,\gamma})+(\Omega_{\alpha\gamma,\delta,\beta}-\Omega_{\alpha\gamma,\beta,\delta})+(\Omega_{\alpha\delta,\beta,\gamma}-\Omega_{\alpha\delta,\gamma,\beta})=\\&=\Omega_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\gamma\delta}+\Omega_{\lambda\beta}R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\delta}+\Omega_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\gamma\delta\beta}+\Omega_{\lambda\gamma}R^{\lambda}{}_{\alpha\delta\beta}+\Omega_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\delta\beta\gamma}+\Omega_{\lambda\delta}R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\gamma}=\\&=\Omega_{\alpha\lambda}(R^{\lambda}{}_{\beta\gamma\delta}+R^{\lambda}{}_{\gamma\delta\beta}+R^{\lambda}{}_{\delta\beta\gamma})+\Omega_{\lambda\beta}R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\delta}+\Omega_{\lambda\gamma}R^{\lambda}{}_{\alpha\delta\beta}+\Omega_{\lambda\delta}R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

На основании (2), а также уравнений, связывающих составляющие тензора кривизны, заключаем, что эта сумма равна нулю. Следовательно, справедливость (17) установлена.

Дифференцируем (14) по x^{σ} и прибавляем к полученному равенству два уравнения, полученные из него при круговой перестановке значков α, ν, σ. Применяя (17), находим

$$\begin{aligned}&\Phi_{\beta\alpha\nu}R_{\lambda\mu\nu\delta,\sigma}+\Phi_{\gamma\alpha\nu}R_{\lambda\mu\delta\beta,\sigma}+\Phi_{\delta\alpha\nu}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\sigma}+\\&+\Phi_{\beta\nu\sigma}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\alpha}+\Phi_{\gamma\nu\sigma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\alpha}+\Phi_{\delta\nu\sigma}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\alpha}+\\&+\Phi_{\beta\sigma\alpha}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\nu}+\Phi_{\gamma\sigma\alpha}R_{\lambda\mu\delta\beta,\nu}+\Phi_{\delta\sigma\alpha}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\nu}=0.\end{aligned} \tag{18}$$

Из (13) следует, что

$$R_{\lambda\mu\gamma\delta,\alpha}=0 \tag{19}$$

при $\alpha>2$, $\delta>2$ (для доказательства полагаем в (13) $\alpha>2$, $\delta>2$, $\beta=1, 2$, $\nu=1, 2$, $\gamma\neq\beta$). Из тождества Bianchi вытекает справедливость равенств (19) при $\gamma>2$, $\delta>2$. Применяя (9), заключаем, что равенства (19) удовлетворяются и при $\lambda>2$, $\gamma>2$ (полагаем в (9) $\lambda>2$, $\gamma>2$, $\alpha=\beta\neq\delta$). Таким образом, доказано, что уравнения (19) выполняются в том случае, когда два (или более) из значков λ, μ, γ, δ, α больше двух.

Полагая в (18) $\alpha=1$, $\nu=2$, $\sigma>2$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\delta>2$, $\lambda=1$, $\mu=2$ и пользуясь равенствами (15) и (19), находим

$$\overline{\Phi}_{12\sigma}\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{\Phi}_{22\sigma}\overline{R}_{12\delta1,1}-\overline{\Phi}_{11\sigma}\overline{R}_{122\delta,2}-\overline{\Phi}_{21\sigma}\overline{R}_{12\delta1,2}=0, \quad \delta, \sigma>2. \tag{20}$$

Из (13) следует, что

$$\overline{\Omega}_{11}\overline{R}_{122\delta,2}+\overline{\Omega}_{22}R_{121\delta,1}=0, \quad \delta>2 \tag{21}$$

(полагаем в (13) $\alpha=1$, $\nu=2$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\delta>2$, $\lambda=1$, $\mu=2$).

В указанной статье Thomas'а из тождества Bianchi было получено следующее равенство:

$$\Omega_{\alpha\beta}\Phi_{\nu\gamma\delta}+\Omega_{\alpha\gamma}\Phi_{\nu\delta\beta}+\Omega_{\alpha\delta}\Phi_{\nu\beta\gamma}-\Omega_{\nu\beta}\Phi_{\alpha\gamma\delta}-\Omega_{\nu\gamma}\Phi_{\alpha\delta\beta}-\Omega_{\nu\delta}\Phi_{\alpha\beta\gamma}=0. \tag{22}$$

На основании этого равенства имеем:

$$\overline{\Omega}_{11}\overline{\Phi}_{22\sigma}+\overline{\Omega}_{22}\overline{\Phi}_{11\sigma}=0 \, **; \ \sigma>2. \tag{23}$$

Так как $\overline{\Omega}_{11}$, $\overline{\Omega}_{22}$ не равны нулю, то

$$\overline{\Phi}_{11\sigma}\overline{R}_{122\delta,2}-\overline{\Phi}_{22\sigma}R_{121\delta,1}=0, \quad \delta, \sigma>2. \tag{24}$$

---

* Предполагаем, что функции $\Omega_{\alpha\beta}$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

** Полагаем в (22) $\alpha=2$, $\nu=2$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\delta=\sigma>2$.

Пользуясь этим равенством и ранее полученным результатом: $\overline{\Phi}_{12\sigma}=\overline{\Phi}_{21\sigma}$ $(\sigma>2)$, можем представить уравнения (20) в следующем виде

$$\overline{\Phi}_{12\sigma}(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})-2\overline{\Phi}_{22\sigma}\overline{R}_{121\delta,1}=0, \quad \delta, \sigma>2. \tag{25}$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$[R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}R^{\lambda\mu}{}_{(\gamma|\varepsilon|,\sigma)}-R_{\lambda\mu(\alpha|\varepsilon|,\beta)}R^{\lambda\mu}{}_{(\gamma|\delta|,\sigma)}]\cdot$$
$$\cdot\left(R^{\delta}_{\omega}-\frac{R}{2}\delta^{\delta}_{\omega}\right)\left(R^{\varepsilon}_{\nu}-\frac{R}{2}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\right)\neq 0. \tag{26}$$

В таком случае нужно считать, что $n\geqslant 4$, так как при $n=3$ выполняется равенство

$$[R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}R^{\lambda\mu}{}_{(\gamma|\varepsilon|,\sigma)}-$$
$$-R_{\lambda\mu(\alpha|\varepsilon|,\beta)}R^{\lambda\mu}{}_{(\gamma|\delta|,\sigma)}]\left(R^{\delta}_{\omega}-\frac{R}{2}\delta^{\delta}_{\omega}\right)\left(R^{\varepsilon}_{\nu}-\frac{R}{2}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\right)=0. \tag{26a}$$

Это можно доказать, пользуясь следующими свойствами тензора $R_{\alpha\beta}$;

$$\overline{R}_{11}=\frac{R}{2}, \quad \overline{R}_{22}=\frac{R}{2}, \quad \overline{R}_{\alpha\beta}=0 \text{ при других } \alpha, \beta. \tag{27}$$

Итак, предполагаем, что $n>3$. Применяя (19) и (27) и имея в виду, что уравнениям (21) удовлетворяют не равные нулю величины $\overline{\Omega}_{11}$ и Ω_{22}, приходим к выводу, что существует такая пара значений δ и ε (больше двух), для которой определитель 2-го порядка

$$D_{\delta\varepsilon}=\begin{vmatrix}\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2} & \overline{R}_{121\delta,1}\\ \overline{R}_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2} & \overline{R}_{121\varepsilon,1}\end{vmatrix}$$

не равен нулю. Тогда из равенств (25) следует, что, при $\sigma=2$, $\overline{\Phi}_{22\sigma}=0$, $\Phi_{12\sigma}=0$. На основании равенств (23) заключаем, что и $\Phi_{11\sigma}=0$ $(\sigma>2)$. Итак, можно сделать следующий вывод:

В том случае, когда справедливы равенства (13) и неравенство (26), $\overline{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}=0$, если, по крайней мере, один из значков α, β, γ больше двух.

Чтобы найти условия, при которых $\overline{\Phi}_{112}$, $\overline{\Phi}_{221}$ обращаются в нуль, дифференцируем равенство (13) по x^{σ}:

$$\Omega_{\alpha\beta,\sigma}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\nu}+\Omega_{\alpha\gamma,\sigma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\nu}+\Omega_{\alpha\delta,\sigma}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\nu}-\Omega_{\beta\nu,\sigma}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\alpha}-\Omega_{\gamma\nu,\sigma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\alpha}-$$
$$-\Omega_{\delta\nu,\sigma}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\alpha}+\Omega_{\alpha\beta}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\nu,\sigma}+\Omega_{\alpha\gamma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\nu,\sigma}+\Omega_{\alpha\delta}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\nu,\sigma}-\Omega_{\beta\nu}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\alpha,\sigma}-$$
$$-\Omega_{\gamma\nu}R_{\lambda\mu\delta\beta,\alpha,\sigma}-\Omega_{\delta\nu}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\alpha,\sigma}=0. \tag{28}$$

Следовательно *,

$$\overline{\Omega}_{11,\sigma}\overline{R}_{122\delta,2}+\overline{\Omega}_{12,\sigma}\overline{R}_{12\delta1,2}+\overline{\Omega}_{1\delta,\sigma}\overline{R}_{1212,2}-\overline{\Omega}_{12,\sigma}\overline{R}_{122\delta,1}-\overline{\Omega}_{22,\sigma}\overline{R}_{12\delta1,1}-$$
$$-\overline{\Omega}_{2\delta,\sigma}\overline{R}_{1212,1}+\overline{\Omega}_{11}R_{122\delta,2,\sigma}-\overline{\Omega}_{22}\overline{R}_{12\delta1,1,\sigma}=0, \qquad \delta>2.$$

С другой стороны, дифференцируя уравнения (2) по x^{σ}, получаем

$$\Omega_{\alpha\gamma,\sigma}\Omega_{\beta\delta}+\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta,\sigma}-\Omega_{\alpha\delta,\sigma}\Omega_{\beta\gamma}-\Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma,\sigma}=R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}.$$

* Полагаем в (28) $\beta=1$, $\gamma=2$, $\delta>2$, $\alpha=1$, $\nu=2$, $\lambda=1$, $\mu=2$.

Следовательно,

$$\overline{\mathfrak{L}}_{2\delta,\sigma}=\frac{\overline{R}_{121\delta,\sigma}}{\overline{\mathfrak{L}}_{11}},\quad \overline{\mathfrak{L}}_{1\delta,\sigma}=-\frac{\overline{R}_{122\delta,\sigma}}{\overline{\mathfrak{L}}_{22}},\quad \delta>2. \tag{29}$$

Применяя эти равенства, находим

$$\overline{\mathfrak{L}}_{11,\sigma}\overline{R}_{122\delta,2}+\overline{\mathfrak{L}}_{22,\sigma}\overline{R}_{121\delta,1}-\overline{\mathfrak{L}}_{12,\sigma}(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})=$$
$$=\frac{1}{\overline{\mathfrak{L}}_{22}}\overline{R}_{122\delta,\sigma}\overline{R}_{1212,2}+\frac{1}{\overline{\mathfrak{L}}_{11}}\overline{R}_{121\delta,\sigma}\overline{R}_{1212,1}-\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,\sigma}-\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,\sigma},\quad \delta>2. \tag{30}$$

Но

$$\overline{\mathfrak{L}}_{11,\sigma}\overline{\mathfrak{L}}_{22}+\overline{\mathfrak{L}}_{22,\sigma}\overline{\mathfrak{L}}_{11}=\overline{R}_{1212,\sigma}. \tag{31}$$

Пользуясь этим уравнением и равенством (21) и полагая в (30) $\sigma=1, 2$, приходим к следующим уравнениям относительно $\overline{\mathfrak{L}}_{22,1}$, $\overline{\mathfrak{L}}_{12,1}$, $\overline{\mathfrak{L}}_{11,2}$, $\overline{\mathfrak{L}}_{12,2}$:

$$2\overline{\mathfrak{L}}_{22,1}\overline{R}_{121\delta,1}-\mathfrak{L}_{12,1}(R_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})=$$
$$=\frac{1}{\overline{\mathfrak{L}}_{22}}\overline{R}_{122\delta,1}\overline{R}_{1212,2}+\frac{2}{\overline{\mathfrak{L}}_{11}}\overline{R}_{121\delta,1}\overline{R}_{1212,1}-\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,1}-\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,1},\quad \delta>2 \tag{32}$$

и

$$2\overline{\mathfrak{L}}_{11,2}\overline{R}_{122\delta,2}-\overline{\mathfrak{L}}_{12,2}(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})=$$
$$=\frac{1}{\overline{\mathfrak{L}}_{11}}R_{121\delta,2}\overline{R}_{1212,1}+\frac{2}{\overline{\mathfrak{L}}_{22}}\overline{R}_{122\delta,2}\overline{R}_{1212,2}-\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,2}-\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2},\ \delta>2. \tag{33}$$

Считая, что неравенство (26) выполнено, и применяя равенства

$$\overline{\Phi}_{112}=\overline{\mathfrak{L}}_{11,2}-\overline{\mathfrak{L}}_{12,1},\quad \overline{\Phi}_{221}=\overline{\mathfrak{L}}_{22,1}-\overline{\mathfrak{L}}_{12,2},$$

получаем

$$\overline{\Phi}_{221}=\frac{1}{2D_{\delta\varepsilon}}\Big\{\frac{1}{\overline{\mathfrak{L}}_{22}}\overline{R}_{1212,2}(\overline{R}_{121\delta,2}\overline{R}_{122\varepsilon,1}-\overline{R}_{121\varepsilon,2}\overline{R}_{122\delta,1})+$$
$$+\frac{2}{\overline{\mathfrak{L}}_{11}}\overline{R}_{1212,1}[(\overline{R}_{122\delta,1}+2\overline{R}_{121\delta,2})\overline{R}_{121\varepsilon,1}-(\overline{R}_{122\varepsilon,1}+2\overline{R}_{121\varepsilon,2})\overline{R}_{121\delta,1}]+$$
$$+(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,1}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,1})(\overline{R}_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2})-$$
$$-(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\varepsilon,2,1}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\varepsilon,1,1})(R_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})+$$
$$+2\overline{R}_{121\delta,1}(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\varepsilon,2,2}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\varepsilon,1,2})-2\overline{R}_{121\varepsilon,1}(\overline{\mathfrak{L}}_{11}R_{122\delta,2,2}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2})\Big\},$$

$$\overline{\Phi}_{112}=-\frac{\overline{\mathfrak{L}}_{11}}{2\overline{\mathfrak{L}}_{22}D_{\delta\varepsilon}}\Big\{\frac{1}{\overline{\mathfrak{L}}_{11}}\overline{R}_{1212,1}(\overline{R}_{122\delta,1}\overline{R}_{121\varepsilon,2}-\overline{R}_{122\varepsilon,1}\overline{R}_{121\delta,2})+$$
$$+\frac{2}{\overline{\mathfrak{L}}_{22}}\overline{R}_{1212,2}[(2\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})\overline{R}_{122\varepsilon,2}-(2\overline{R}_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2})\overline{R}_{122\delta,2}]+$$
$$+(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,2}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2})(\overline{R}_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2})-$$
$$-(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\varepsilon,2,2}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\varepsilon,1,2})(R_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})+$$
$$+2\overline{R}_{122\delta,2}(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\varepsilon,2,1}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\varepsilon,1,1})-2\overline{R}_{122\varepsilon,2}(\overline{\mathfrak{L}}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,1}+\overline{\mathfrak{L}}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,1})\Big\}\,^{*};$$
$$\delta\neq\varepsilon,\qquad \delta,\varepsilon>2.$$

---

* Применяем равенство (21).

После некоторых преобразований и воспользовавшись равенством

$$\bar{R}_{1212} = \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{22}, \tag{34}$$

получаем следующие уравнения, выражающие необходимые и достаточные условия для существования равенств $\bar{\Phi}_{112} = 0$, $\bar{\Phi}_{221} = 0$:

$$\begin{gathered}
\bar{\Omega}_{11}\{\bar{R}_{1212,2}(R_{121\delta,2}\bar{R}_{122\varepsilon,1} - \bar{R}_{121\varepsilon,2}\bar{R}_{122\delta,1}) + \bar{R}_{1212}[\bar{R}_{122\delta,2,1}(\bar{R}_{122\varepsilon,1} + \bar{R}_{121\varepsilon,2}) - \\
- \bar{R}_{122\varepsilon,2,1}(R_{122\delta,1} + \bar{R}_{121\delta,2}) + 2\bar{R}_{121\delta,1}R_{122\delta,2,2} - 2\bar{R}_{121\varepsilon,1}\bar{R}_{122\delta,2,2}]\} + \\
+ \bar{\Omega}_{22}\{2\bar{R}_{1212,1}[(\bar{R}_{122\delta,1} + 2\bar{R}_{121\delta,2})\bar{R}_{121\varepsilon,1} - (\bar{R}_{122\varepsilon,1} + 2\bar{R}_{121\varepsilon,2})\bar{R}_{121\delta,1}] + \\
+ \bar{R}_{1212}[\bar{R}_{121\delta,1,1}(\bar{R}_{122\varepsilon,1} + R_{121\varepsilon,2}) - \bar{R}_{121\varepsilon,1,1}(\bar{R}_{122\delta,1} + \bar{R}_{121\delta,2}) + \\
+ 2\bar{R}_{121\delta,1}\bar{R}_{121\varepsilon,1,2} - 2\bar{R}_{121\varepsilon,1}\bar{R}_{121\delta,1,2}]\} = 0, \\
\bar{\Omega}_{11}\{2\bar{R}_{1212,2}[(\bar{R}_{121\delta,2} + 2\bar{R}_{122\delta,1})\bar{R}_{122\varepsilon,2} - (\bar{R}_{121\varepsilon,2} + 2\bar{R}_{122\varepsilon,1})\bar{R}_{122\delta,2}] + \\
+ \bar{R}_{1212}[R_{122\delta,2,2}(\bar{R}_{122\varepsilon,1} + \bar{R}_{121\varepsilon,2}) - \bar{R}_{122\varepsilon,2,2}(\bar{R}_{122\delta,1} + \bar{R}_{121\delta,2}) + \\
+ 2\bar{R}_{122\delta,2}\bar{R}_{122\varepsilon,2,1} - 2R_{122\varepsilon,2}\bar{R}_{122\delta,2,1}]\} + \\
+ \bar{\Omega}_{22}\{\bar{R}_{1212,1}(\bar{R}_{122\delta,1}\bar{R}_{121\varepsilon,2} - \bar{R}_{122\varepsilon,1}\bar{R}_{121\delta,2}) + \\
+ \bar{R}_{1212}[\bar{R}_{121\delta,1,2}(\bar{R}_{122\varepsilon,1} + \bar{R}_{121\varepsilon,2}) - \bar{R}_{121\varepsilon,1,2}(\bar{R}_{122\delta,1} + \bar{R}_{121\delta,2}) + \\
+ 2\bar{R}_{122\delta,2}R_{121\varepsilon,1,1} - 2\bar{R}_{122\varepsilon,2}\bar{R}_{121\delta,1,1}]\} = 0, \\
\delta,\ \varepsilon > 2.
\end{gathered}$$

Для дальнейшего преобразования этих уравнений воспользуемся равенством (8). Умножая обе части этого равенства на $\Omega_{\nu\varepsilon}$, находим

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\nu\varepsilon}R_{\lambda\mu\gamma\delta} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\nu\varepsilon}R_{\lambda\mu\delta\beta} + \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\nu\varepsilon}R_{\lambda\mu\beta\gamma} = 0.$$

Переставляем значки α и ν:

$$\Omega_{\nu\beta}\Omega_{\alpha\varepsilon}R_{\lambda\mu\gamma\delta} + \Omega_{\nu\gamma}\Omega_{\alpha\varepsilon}R_{\lambda\mu\delta\beta} + \Omega_{\nu\delta}\Omega_{\alpha\varepsilon}R_{\lambda\mu\beta\gamma} = 0.$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего и применяя (2), получаем:

$$R_{\alpha\nu\beta\varepsilon}R_{\lambda\mu\gamma\delta} + R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon}R_{\lambda\mu\delta\beta} + R_{\alpha\nu\delta\varepsilon}R_{\lambda\mu\beta\gamma} = 0. \tag{35}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x^σ, находим:

$$\begin{gathered}
R_{\alpha\nu\beta\varepsilon,\sigma}R_{\lambda\mu\gamma\delta} + R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon,\sigma}R_{\lambda\mu\delta\beta} + R_{\alpha\nu\delta\varepsilon,\sigma}R_{\lambda\mu\beta\gamma} + R_{\alpha\nu\beta\varepsilon}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\sigma} + \\
+ R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon}R_{\lambda\mu\delta\beta,\sigma} + R_{\alpha\nu\delta\varepsilon}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\sigma} = 0.
\end{gathered} \tag{36}$$

Дифференцируем обе части полученного равенства по x^ω и получаем:

$$\begin{gathered}
R_{\alpha\nu\beta\varepsilon,\sigma,\omega}R_{\lambda\mu\gamma\delta} + R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon,\sigma,\omega}R_{\lambda\mu\delta\beta} + R_{\alpha\nu\delta\varepsilon,\sigma,\omega}R_{\lambda\mu\beta\gamma} + R_{\alpha\nu\beta\varepsilon,\sigma}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\omega} + \\
+ R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon,\sigma}R_{\lambda\mu\delta\beta,\omega} + R_{\alpha\nu\delta\varepsilon,\sigma}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\omega} + R_{\alpha\nu\beta\varepsilon,\omega}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\sigma} + R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon,\omega}R_{\lambda\mu\delta\beta,\sigma} + \\
+ R_{\alpha\nu\delta\varepsilon,\omega}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\sigma} + R_{\alpha\nu\beta\varepsilon}R_{\lambda\mu\gamma\delta,\sigma,\omega} + R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon}R_{\lambda\mu\delta\beta,\sigma,\omega} + R_{\alpha\nu\delta\varepsilon}R_{\lambda\mu\beta\gamma,\sigma,\omega} = 0.
\end{gathered} \tag{37}$$

Следовательно *,

$$\begin{gathered}
\bar{R}_{12\delta\varepsilon,\sigma,\omega}R_{1212} + \bar{R}_{121\varepsilon,\sigma}\bar{R}_{122\delta,\omega} + \bar{R}_{122\varepsilon,\sigma}\bar{R}_{12\delta1,\omega} + R_{121\varepsilon,\omega}\bar{R}_{122\delta,\sigma} + \\
+ \bar{R}_{122\varepsilon,\omega}\bar{R}_{12\delta1,\sigma} = 0, \qquad \delta,\ \varepsilon > 2
\end{gathered}$$

---

* Полагаем $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta, \varepsilon > 2$, $\alpha = 1$, $\nu = 2$.

или

$$R_{12\delta\varepsilon,\sigma,\omega}\overline{R}_{1212}=$$

$$=R_{121\delta,\sigma}\overline{R}_{122\varepsilon,\omega}+R_{121\delta,\omega}R_{122\varepsilon,\sigma}-R_{121\varepsilon,\sigma}R_{122\delta,\omega}-R_{121\varepsilon,\omega}R_{122\delta,\sigma},\qquad \delta,\ \varepsilon>2. \quad (38)$$

Применяя эти равенства и пользуясь (21), можно необходимые и достаточные условия для существования равенств $\overline{\Phi}_{112}=0$, $\overline{\Phi}_{221}=0$ представить в следующем виде:

$$\overline{\Omega}_{11}\{(\overline{R}_{122\varepsilon,1}+R_{121\varepsilon,2})\overline{R}_{122\delta,1,2}-(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})\overline{R}_{122\varepsilon,1,2}+\overline{R}_{1212,2}\overline{R}_{12\delta\varepsilon,1,2}+$$
$$+2R_{121\delta,1}\overline{R}_{122\varepsilon,2,2}-2R_{121\varepsilon,1}\overline{R}_{122\delta,2,2}-2\overline{R}_{1212,1}\overline{R}_{12\delta\varepsilon,2,2}\}+$$
$$+\overline{\Omega}_{22}\{(\overline{R}_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2})\overline{R}_{121\delta,1,1}-(\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})R_{121\varepsilon,1,1}-\overline{R}_{1212,1}\overline{R}_{12\delta\varepsilon,1,1}+$$
$$+2R_{121\delta,1}\overline{R}_{121\varepsilon,1,2}-2\overline{R}_{121\varepsilon,1}\overline{R}_{121\delta,1,2}\}=0,\qquad \delta,\ \varepsilon>2; \quad (39)$$

$$\overline{\Omega}_{11}\{(R_{122\varepsilon,1}+R_{121\varepsilon,2})\overline{R}_{122\delta,2,2}-(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})\overline{R}_{122\varepsilon,2,2}+\overline{R}_{1212,2}\overline{R}_{12\delta\varepsilon,2,2}+$$
$$+2R_{122\delta,2}\overline{R}_{122\varepsilon,2,1}-2\overline{R}_{122\varepsilon,2}\overline{R}_{122\delta,2,1}\}+$$
$$+\Omega_{22}\{(R_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2})\overline{R}_{121\delta,1,2}-(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})\overline{R}_{121\varepsilon,1,2}-\overline{R}_{1212,1}\overline{R}_{12\delta\varepsilon,1,2}+$$
$$+2R_{122\delta,2}\overline{R}_{121\varepsilon,1,1}-2\overline{R}_{122\varepsilon,2}\overline{R}_{121\delta,1,1}+2R_{1212,2}\overline{R}_{12\delta\varepsilon,1,1}\}=0\qquad \delta,\ \varepsilon>2. \quad (40)$$

Эти уравнения можно представить в инвариантной форме:

$$\{R^{\lambda\mu\nu}{}_{[\alpha,|\omega}R_{\lambda\mu|\delta\varepsilon],\nu,\gamma}+R^{\lambda\mu}{}_{\omega[\alpha,|}{}^{\nu}R_{\lambda\mu|\delta\varepsilon],\nu,\gamma}-2R^{\lambda\mu\nu}{}_{[\alpha,|\nu}R_{\lambda\mu|\delta\varepsilon],\omega,\gamma}\}\cdot$$
$$\cdot R^{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\omega}_{\xi}\left(R^{\delta}_{\eta}-\frac{R}{2}\,\delta^{\delta}_{\eta}\right)\left(R^{\varepsilon}_{\tau}-\frac{R}{2}\,\delta^{\varepsilon}_{\tau}\right)\Omega_{\beta\sigma}=0. \quad (41)$$

Заметим, что $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\varepsilon,\omega}=0$ в том случае, когда, по крайней мере, три из значков α, β, γ, δ, ε, ω больше двух. Это следует из тождества Bianchi и равенств (19) и (37).

Таким образом, когда справедливы уравнения Гаусса, ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ равен двум и выполнено неравенство (26), уравнения (13) и (41) выражают необходимые и достаточные условия существования уравнений Кодацци.

§ 3

Обратимся теперь к уравнениям Гаусса. Легко доказать, что симметричный тензор 2-го порядка $\Omega_{\alpha\beta}$, имеющий ранг 2, можно представить следующим образом:

$$\Omega_{\alpha\beta}=p\nu_{\alpha}\nu_{\beta}+q\,(\nu_{\alpha}\sigma_{\beta}+\nu_{\beta}\sigma_{\alpha})+r\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}, \quad (42)$$

где p, q и r — скаляры, а ν_{α}, σ_{α} — линейно независимые векторы. Подставим эти выражения для $\Omega_{\alpha\beta}$ в уравнения Гаусса, тогда

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=(pr-q^{2})(\nu_{\alpha}\sigma_{\beta}-\nu_{\beta}\sigma_{\alpha})(\nu_{\gamma}\sigma_{\delta}-\nu_{\delta}\sigma_{\gamma}). \quad (43)$$

Из этих уравнений видно, что разность $pr-q^{2}$ не должна равняться

нулю (иначе ранг $\Omega_{\alpha\beta}$ был бы меньше двух). Не нарушая общности, можно считать, что

$$pr - q^2 = \varepsilon = \pm 1. \tag{44}$$

Из равенств (43) следует, что составляющие тензора кривизны рассматриваемого пространства должны удовлетворять системе уравнений

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\lambda\mu\nu\sigma} - R_{\alpha\beta\nu\sigma}R_{\lambda\mu\gamma\delta} = 0; \tag{45}$$

иначе говоря, ранг матрицы $\| R_{\alpha\beta\gamma\delta} \|$ $\frac{n(n-1)}{2}$-го порядка (каждой строке матрицы соответствует определенная пара значений α и β $(\alpha < \beta)$, каждому столбцу - определенная пара значений γ и δ $(\gamma < \delta)$) должен быть равен единице.

Если это условие выполнено, то тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно представить в следующем виде:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon\xi_{\alpha\beta}\xi_{\gamma\delta}, \tag{46}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и $\xi_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор 2-го порядка. Так как найдется такая пара значений α и β $(\alpha < \beta)$, для которой $\xi_{\alpha\beta} \neq 0$ то знак ε определяется из условия $R_{\alpha\beta\alpha\beta} = \varepsilon\xi^2_{\alpha\beta}$ и

$$\xi_{\alpha\beta} = \pm\sqrt{\varepsilon R_{\alpha\beta\alpha\beta}}. \tag{47}$$

Остальные составляющие $\xi_{\lambda\mu}$ находятся по формулам

$$\xi_{\lambda\mu} = \frac{R_{\alpha\beta\lambda\mu}}{\varepsilon\xi_{\alpha\beta}}. \tag{48}$$

Итак, тензор $\xi_{\gamma\delta}$ определен с точностью до знака. В дальнейшем мы фиксируем определенный знак в формуле (47). Тензор $\xi_{\alpha\beta}$ является бивектором, т. е.

$$\xi_{\alpha\beta} = \nu_\alpha\sigma_\beta - \nu_\beta\sigma_\alpha, \tag{49}$$

где ν_α и σ_α - два линейно независимых вектора. Это можно установить простой проверкой. Положим

$$\nu_\alpha = a^\lambda\xi_{\alpha\lambda}, \qquad \sigma_\alpha = b^\lambda\xi_{\alpha\lambda} \tag{50}$$

и подставим эти выражения в правую часть равенства (49). Тогда

$$a^\lambda b^\mu(\xi_{\alpha\lambda}\xi_{\beta\mu} - \xi_{\beta\lambda}\xi_{\alpha\mu}) = a^\lambda b^\mu(\xi_{\alpha\lambda}\xi_{\beta\mu} + \xi_{\alpha\mu}\xi_{\beta\lambda}) = -a^\lambda b^\mu\xi_{\alpha\beta}\xi_{\mu\lambda} = a^\lambda b^\mu\xi_{\alpha\beta}\xi_{\lambda\mu}. \tag{51}$$

Здесь нужно воспользоваться формулами (46) и уравнениями, связывающими составляющие тензора кривизны. Если мы поставим условие

$$a^\lambda b^\mu\xi_{\lambda\mu} = 1,$$

то векторы ν_α, σ_α, данные формулами (50), будут удовлетворять уравнению (49). Заметим, что, если ν_α и σ_α являются некоторыми решениями уравнения (49), то всякие другие решения этого уравнения представляют собой линейные комбинации указанных векторов. Следовательно, формулы (50) дают общие решения уравнения (49), причем должно быть выполнено равенство (51).

Таким образом, для того чтобы тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, данный формулой (42), удовлетворял уравнениям (2), необходимо и достаточно (если выполнено равенство (44)), чтобы векторы ν_α и σ_α были решениями уравнения (49)

или уравнения $\nu_\alpha\sigma_\beta - \nu_\beta\sigma_\alpha = -\xi_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим некоторые определенные решения (49). ν_α и σ_α будут их линейными комбинациями. Не нарушая общности, можно считать, что ν_α и σ_α совпадают с этими определенными решениями.

Задача сводится к отысканию трех скаляров p, q и r, связанных зависимостью (44) (знак ε определяется из условия вещественности $\xi_{\alpha\beta}$) и обладающих тем свойством, что тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, данный формулой (42), где ν_α и σ_α — определенные решения уравнения (49) *, — удовлетворяет уравнениям Кодацци.

§ 4

Если выполнено неравенство (26), то необходимые и достаточные условия для скаляров p, q и r даются уравнениями (44), (13) и (41) **.

Уравнения (13) можно представить в следующем виде:

$$\Omega_{\alpha[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\omega} - \Omega_{\omega[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\alpha} = 0. \tag{52}$$

Введем, далее, обозначение

$$Q_{\xi\eta\tau}{}^{\beta\omega} = \{R^{\lambda\mu\nu}{}_{[\alpha,|\sigma}R_{\lambda\mu|\delta\varepsilon],\nu,\gamma\lambda\mu} + R_{\sigma[\alpha,|}{}^{\nu}R_{\lambda\mu|\delta\varepsilon],\nu,\gamma} - 2R^{\lambda\mu\nu}{}_{[\alpha,|\nu}R_{\lambda\mu|\delta\varepsilon],\sigma,\gamma}\} \cdot$$
$$\cdot R^{\alpha\beta\gamma\omega}R^{\sigma}_{\xi}\left(R^{\delta}_{\eta} - \frac{R}{2}\delta^{\delta}_{\eta}\right)\left(R^{\varepsilon}_{\tau} - \frac{R}{2}\delta^{\varepsilon}_{\tau}\right). \tag{53}$$

Тогда уравнения (41) примут вид:

$$Q_{\xi\eta\tau}{}^{\beta\omega}\Omega_{\beta\omega} = 0. \tag{54}$$

Применяя равенства (42), получаем:

$$p\,[\nu_\alpha\nu_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\omega} - \nu_\omega\nu_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\alpha}] +$$
$$+ q\,[\nu_\alpha\sigma_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\omega} + \sigma_\alpha\nu_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\omega} - \nu_\omega\sigma_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\alpha} - \sigma_\omega\nu_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\alpha}] +$$
$$+ r\,[\sigma_\alpha\sigma_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\omega} - \sigma_\omega\sigma_{[\beta}R_{|\lambda\mu|\gamma\delta],\alpha}] = 0 \tag{55}$$

и

$$pQ_{\xi\eta\tau}{}^{\beta\omega}\nu_\beta\nu_\omega + qQ_{\xi\eta\tau}{}^{\beta\omega}(\nu_\beta\sigma_\omega + \nu_\omega\sigma_\beta) + rQ_{\xi\eta\tau}{}^{\beta\omega}\sigma_\beta\sigma_\omega = 0. \tag{56}$$

Для того чтобы существовали значения p, q и r, удовлетворяющие уравнениям (55) и (56) и не равные одновременно нулю, необходимо и достаточно, чтобы все определители третьего порядка, составленные из коэффициентов при p, q и r в уравнениях (55) и (56), обращались в нуль.

Пусть M — некоторая точка рассматриваемой нами области пространства V_n. Приведем в соответствие этой точке такую систему координат, чтобы в этой точке и указанной системе выполнялись равенства:

$$g^{11} = g^{22} = \ldots = g^{nn} = 1, \quad g^{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad R_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

---

* Предполагается, что выполнено необходимое условие; тензор кривизны удовлетворяет уравнениям (45).

** Заметим, что уравнения (41) выражают необходимые условия для пространства класса I и в случае существования равенства (26а). Но тогда они следуют из (18) и уравнений, полученных в результате дифференцирования (26а).

Условимся обозначать составляющие тензора $N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ в точке M относительно соответствующей системы координат через $\tilde{N}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$. Из уравнений (35), вытекающих из равенств (46), получаем, после поднятия значков γ и δ и свертывания по индексам μ и γ, λ и δ,

$$R_{\alpha\nu\beta\varepsilon}R - R_{\alpha\nu\gamma\varepsilon}R^{\gamma}_{\beta} - R_{\alpha\nu\delta\varepsilon}R^{\delta}_{\beta} = 0$$

или

$$R_{\alpha\nu\varepsilon\gamma}\left(R^{\gamma}_{\beta} - \frac{R}{2}\delta^{\gamma}_{\beta}\right) = 0. \tag{57}$$

Поднимаем значок ε и свертываем по индексам ν и ε. В результате

$$R_{\alpha\gamma}\left(R^{\gamma}_{\beta} - \frac{R}{2}\delta^{\gamma}_{\beta}\right) = 0. \tag{58}$$

Следовательно,

$$\tilde{R}_{11}\left(\tilde{R}_{11} - \frac{R}{2}\right) = 0, \quad \tilde{R}_{22}\left(\tilde{R}_{22} - \frac{R}{2}\right) = 0, \ldots, \tilde{R}_{nn}\left(\tilde{R}_{nn} - \frac{R}{2}\right) = 0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\tilde{R}_{11} = \tilde{R}_{22} = \frac{R}{2}, \quad \tilde{R}_{\alpha\beta} = 0 \text{ при других } \alpha, \beta. \tag{59}$$

В таком случае из равенств (57) следует, что $\tilde{R}_{\alpha\nu\varepsilon\gamma} = 0$, если хоть один из значков α, ν, ε, γ больше двух. Поэтому

$$\tilde{\xi}_{12} = -\tilde{\xi}_{21} \neq 0, \quad \tilde{\xi}_{\alpha\beta} = 0 \text{ при других } \alpha, \beta. \tag{60}$$

Применяя равенства (50), выясняем, что $\tilde{\nu}_{\delta} = \tilde{\sigma}_{\delta} = 0$, если $\delta > 2$. Пользуясь равенствами (36) и (37), получающимися в результате дифференцирования (35), и тождеством Bianchi, заключаем, что $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\varepsilon} = 0$, если, по крайней мере, два из значков $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ больше двух, $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\varepsilon,\,\omega} = 0$, если три (или более) из значков $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega$ больше двух.

Вычисляя (в указанной точке и соответствующей системе координат) коэффициенты при p, q и r в уравнениях (55), убеждаемся, что эти уравнения или обращаются в тождества, или имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &p\,[\tilde{\nu}_1^2\tilde{R}_{122\delta,\,2} - \tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2(\tilde{R}_{122\delta,\,1} + \tilde{R}_{121\delta,\,2}) + \tilde{\nu}_2^2\tilde{R}_{121\delta,\,1}] + \\ &+ q\,[2\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_1\tilde{R}_{122\delta,\,2} - (\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1)(\tilde{R}_{122\delta,\,1} + \tilde{R}_{121\delta,\,2}) + 2\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2\tilde{R}_{121\delta,\,1}] + \\ &+ r\,[\tilde{\sigma}_1^2\tilde{R}_{122\delta,\,1} - \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2(\tilde{R}_{122\delta,\,1} + \tilde{R}_{121\delta,\,2}) + \tilde{\sigma}_2^2\tilde{R}_{121\delta,\,1}] = 0, \quad \delta > 2. \end{aligned} \tag{61}$$

Вычислим теперь определитель, составленный из коэффициентов при p, q и r в трех таких уравнениях. После некоторых преобразований, применяя равенство (49), получаем для определителя такое выражение:

$$\tilde{\xi}^3_{12}\begin{vmatrix} \tilde{R}_{121\delta,\,1} & \tilde{R}_{122\delta,\,1} + \tilde{R}_{121\delta,\,2} & \tilde{R}_{122\delta,\,2} \\ \tilde{R}_{121\varepsilon,\,1} & \tilde{R}_{122\varepsilon,\,1} + \tilde{R}_{121\varepsilon,\,2} & \tilde{R}_{122\varepsilon,\,2} \\ \tilde{R}_{121\omega,\,1} & \tilde{R}_{122\omega,\,1} + \tilde{R}_{121\omega,\,2} & \tilde{R}_{122\omega,\,2} \end{vmatrix}$$

$$(\delta, \varepsilon, \omega > 2).$$

Для того чтобы существовали значения p, q и r, удовлетворяющие уравнениям (55) и (56) и не равные одновременно нулю, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_{121\delta,1} & \tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2} & \tilde{R}_{122\delta,2} \\ \tilde{R}_{121\varepsilon,1} & \tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2} & \tilde{R}_{122\varepsilon,2} \\ \tilde{R}_{121\omega,1} & \tilde{R}_{122\omega,1}+\tilde{R}_{121\omega,2} & \tilde{R}_{122\omega,2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (62)$$

$$(\delta,\ \varepsilon,\ \omega > 2).$$

В инвариантной форме его можно записать так:

$$\begin{vmatrix} R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)} & R_{\lambda\mu(\alpha_1|\delta|,\beta_1)} & R_{\lambda\mu(\alpha_2|\delta|,\beta_2)} \\ R_{\lambda_1\mu_1(\alpha|\varepsilon|,\beta)} & R_{\lambda_1\mu_1(\alpha_1|\varepsilon|,\beta_1)} & R_{\lambda_1\mu_1(\alpha_2|\varepsilon|,\beta_2)} \\ R_{\lambda_2\mu_2(\alpha|\omega|,\beta)} & R_{\lambda_2\mu_2(\alpha_1|\omega|,\beta_1)} & R_{\lambda_2\mu_2(\alpha_2|\omega|,\beta_2)} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left(R^{\delta}_{\nu} - \frac{R}{2}\,\delta^{\delta}_{\nu}\right)\left(R^{\varepsilon}_{\sigma} - \frac{R}{2}\,\delta^{\varepsilon}_{\sigma}\right)\left(R^{\omega}_{\xi} - \frac{R}{2}\,\delta^{\omega}_{\xi}\right) = 0. \qquad (63)$$

Заметим, что это условие всегда выполняется при $n < 5$.

В точке M и специальной системе координат уравнения (56) имеют вид:

$$\begin{aligned} & p\,[\tilde{\nu}_1^{\,2}\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{11} + \tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2(\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{12} + \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{21}) + \tilde{\nu}_2^{\,2}\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{22}] + \\ & + q\,[2\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_1\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{11} + (\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1)(\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{12} + \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{21}) + 2\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{22}] + \\ & + r\,[\tilde{\sigma}_1^{\,2}\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{11} + \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2(\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{12} + \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{21}) + \tilde{\sigma}_2^{\,2}\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{22}] = 0. \end{aligned} \qquad (64)$$

Определитель системы, составленной из двух уравнений (61) и одного уравнения (64), можно представить в виде произведения

$$-\begin{vmatrix} \tilde{\nu}_1^{\,2} & \tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2 & \tilde{\nu}_2^{\,2} \\ 2\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_1 & \tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2+\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1 & 2\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_1^{\,2} & \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 & \tilde{\sigma}_2^{\,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{R}_{122\delta,2} & \tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2} & \tilde{R}_{121\delta,1} \\ \tilde{R}_{122\varepsilon,2} & \tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2} & \tilde{R}_{121\varepsilon,1} \\ \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{11} & -(\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{21}) & \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{22} \end{vmatrix}$$

$$(\delta,\ \varepsilon > 0).$$

Но

$$\begin{vmatrix} \tilde{\nu}_1^{\,2} & \tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2 & \tilde{\nu}_2^{\,2} \\ 2\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_1 & \tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2+\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1 & 2\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_1^{\,2} & \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 & \tilde{\sigma}_2^{\,2} \end{vmatrix} = \tilde{\xi}_{12}^{\,3}.$$

В результате получаем следующее необходимое условие:

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_{121\delta,1} & \tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2} & \tilde{R}_{122\delta,2} \\ \tilde{R}_{121\varepsilon,1} & \tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2} & \tilde{R}_{122\varepsilon,2} \\ \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{22} & -(\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{21}) & \tilde{Q}_{\xi\eta\zeta}{}^{11} \end{vmatrix} = 0. \qquad (65)$$

$$(\delta,\ \varepsilon > 2).$$

Иначе говоря, в любой точке и системе координат должно быть выполнено равенство

$$\begin{vmatrix} R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)} & R_{\lambda\mu(\alpha_1|\delta|,\beta_1)} & R_{\lambda\mu(\alpha_2|\delta|,\beta_2)} \\ R_{\lambda_1\mu_1(\alpha|\varepsilon|,\beta)} & R_{\lambda_1\mu_1(\alpha_1|\varepsilon|,\beta_1)} & R_{\lambda_1\mu_1(\alpha_2|\varepsilon|,\beta_2)} \\ R_{(\alpha|\nu|\beta)\sigma} & R_{(\alpha_1|\nu|\beta_1)\sigma} & R_{(\alpha_2|\nu|\beta_2)\sigma} \end{vmatrix} \cdot$$
$$\cdot\, Q_{\xi\eta\tau}{}^{\nu\sigma}\left(R^{\delta}_{\omega}-\frac{R}{2}\,\delta^{\delta}_{\omega}\right)\left(R^{\varepsilon}_{\rho}-\frac{R}{2}\,\delta^{\varepsilon}_{\rho}\right)=0. \qquad (66)$$

Рассматривая системы, составленные из одного уравнения (61), двух уравнений (64) и трех уравнений (64), получаем аналогичным путем следующие необходимые условия:

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}_{122\delta,2} & \tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2} & \tilde{R}_{121\delta,1} \\ \tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{11} & -(\tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{21}) & \tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{22} \\ \tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{11} & -(\tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{21}) & \tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{22} \end{vmatrix}=0 \quad (\delta>2) \qquad (67)$$

и

$$\begin{vmatrix} \tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{11} & \tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{21} & \tilde{Q}_{\xi\eta\tau}{}^{22} \\ \tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{11} & \tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{21} & \tilde{Q}_{\xi_1\eta_1\tau_1}{}^{22} \\ \tilde{Q}_{\xi_2\eta_2\tau_2}{}^{11} & \tilde{Q}_{\xi_2\eta_2\tau_2}{}^{12}+\tilde{Q}_{\xi_2\eta_2\tau_2}{}^{21} & \tilde{Q}_{\xi_2\eta_2\tau_2}{}^{22} \end{vmatrix}=0. \qquad (68)$$

Так как, по предположению, справедливо неравенство (26), то существует такая пара значений δ и ε, бо́льших двух, для которой ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \tilde{R}_{121\delta,1} & \tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2} & \tilde{R}_{122\delta,2} \\ \tilde{R}_{121\varepsilon,1} & \tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2} & \tilde{R}_{122\varepsilon,2} \end{matrix}\right\| \qquad (69)$$

равен двум. Поэтому равенства (67) и (68) являются следствиями (62) и (65).

Итак, если выполнено неравенство (26), то для того, чтобы существовали значения p, q и r, удовлетворяющие уравнениям (55) и (56) и не равные одновременно нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (63) и (66).

Предполагаем существование этих равенств. Рассмотрим два уравнения системы (61)

$$\begin{gathered}[\tilde{\nu}_1{}^2\tilde{R}_{122\delta,2}-\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})+\tilde{\nu}_2{}^2\tilde{R}_{121\delta,1}]\,p+\\ +[2\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_1\tilde{R}_{122\delta,2}-(\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2+\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1)(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})+2\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2\tilde{R}_{121\delta,1}]\,q+\\ +[\tilde{\sigma}_1{}^2\tilde{R}_{122\delta,2}-\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})+\tilde{\sigma}_2{}^2\tilde{R}_{121\delta,1}]\,r=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[\tilde{\nu}_1{}^2\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})+\tilde{\nu}_2{}^2\tilde{R}_{121\varepsilon,1}]\,p+\\ +[2\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_1\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-(\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2+\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1)(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})+2\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2\tilde{R}_{121\varepsilon,1}]\,q+\\ +[\tilde{\sigma}_1{}^2\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})+\tilde{\sigma}_2{}^2\tilde{R}_{121\varepsilon,1}]\,r=0\end{gathered}$$

$$(\delta,\ \varepsilon>2),$$

соответствующие тем значениям δ и ε, для которых ранг матрицы (69) равен двум. Все остальные уравнения (61) и уравнения (64) будут следствиями написанных равенств. Из них мы находим следующие выражения для p, q и r (коэффициенты при λ не равны одновременно нулю); в противном случае ранг матрицы (69) был бы меньше двух:

$$\left.\begin{aligned} p = \lambda \{ & [\tilde{R}_{122\delta,2}(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})-\tilde{R}_{122\varepsilon,2}(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})]\tilde{\sigma}_1^2+ \\ & +2[\tilde{R}_{121\delta,1}\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{R}_{121\varepsilon,1}\tilde{R}_{122\delta,2}]\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2+ \\ & +[(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})\tilde{R}_{121\varepsilon,1}-(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})\tilde{R}_{121\delta,1}]\tilde{\sigma}_2^2\}, \\ q = -\lambda \{ & [\tilde{R}_{122\delta,2}(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})-\tilde{R}_{122\varepsilon,2}(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})]\tilde{\nu}_1^2+ \\ & +[\tilde{R}_{121\delta,1}\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{R}_{121\varepsilon,1}\tilde{R}_{122\delta,2}](\tilde{\nu}_1\tilde{\sigma}_2+\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_1)+ \\ & +[(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})\tilde{R}_{121\varepsilon,1}-(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})\tilde{R}_{121\delta,1}]\tilde{\nu}_2\tilde{\sigma}_2\}. \\ r = \lambda \{ & [\tilde{R}_{122\delta,2}(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})-\tilde{R}_{122\varepsilon,2}(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})]\tilde{\nu}_1^2+ \\ & +2[\tilde{R}_{121\delta,1}\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{R}_{121\varepsilon,1}\tilde{R}_{122\delta,2}]\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2+ \\ & +[(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})\tilde{R}_{121\varepsilon,1}-(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})\tilde{R}_{121\delta,1}]\tilde{\nu}_2^2\}. \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Для определения λ воспользуемся уравнением (44). Подставив в него вместо p, q и r выражения, данные формулами (70), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon = \lambda^2 \{ & [\tilde{R}_{122\delta,2}(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})-\tilde{R}_{122\varepsilon,2}(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})]\cdot \\ & \cdot[(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})\tilde{R}_{121\varepsilon,1}-(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})\tilde{R}_{121\delta,1}]- \\ & -[\tilde{R}_{121\delta,1}\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{R}_{121\varepsilon,1}\tilde{R}_{122\delta,2}]^2\}\tilde{\xi}_{12}^{\,2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Введя обозначение

$$\begin{aligned} & [\tilde{R}_{122\delta,2}(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})-\tilde{R}_{122\varepsilon,2}(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})]\cdot \\ & \cdot[(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})\tilde{R}_{121\varepsilon,1}-(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2})\tilde{R}_{121\delta,1}]- \\ & -[\tilde{R}_{121\delta,1}\tilde{R}_{122\varepsilon,2}-\tilde{R}_{121\varepsilon,1}\tilde{R}_{122\delta,2}]^2 = L_{\delta\varepsilon}, \end{aligned} \quad (72)$$

находим

$$\varepsilon = \lambda^2 L_{\delta\varepsilon}\tilde{\xi}_{12}^{\,2} \text{ или } 1 = \lambda^2 L_{\delta\varepsilon}\tilde{R}_{1212}, \qquad \lambda^2 L_{\delta\varepsilon} R = -2.$$

Из последнего равенства следует, что $L_{\delta\varepsilon}$ должно иметь знак, противоположный знаку R.

Докажем, что необходимым и достаточным условием для этого является существование следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & R_{\lambda\mu(\alpha|\omega|,\nu)}R^{\lambda\mu}{}_{(\beta|\rho|,\sigma)}R_{\lambda_1\mu_1(\gamma|\omega_1|,\xi)}R^{\lambda_1\mu_1}{}_{(\tau|\rho_1|,\eta)}\cdot\left(R^{\omega\omega_1}-\frac{R}{2}\,g^{\omega\omega_1}\right)\cdot \\ & \cdot\left(R^{\rho\rho_1}-\frac{R}{2}\,g^{\rho\rho_1}\right)R^{\alpha\beta\gamma\tau}(R^{\nu\xi\sigma\eta}+R^{\nu\eta\sigma\xi})\cdot R<0. \end{aligned} \quad (73)$$

Для доказательства найдем выражение для левой части неравенства в точке M и соответствующей специальной системе координат. После некоторых преобразований получаем

$$R^3\tilde{R}_{1212}{}^2\sum_{\omega=3}^{n}\sum_{\rho=3}^{n}[\tilde{R}_{121\omega,1}\tilde{R}_{122\rho,2}(\tilde{R}_{122\omega,1}+\tilde{R}_{121\omega,2})(\tilde{R}_{122\rho,1}+\tilde{R}_{121\rho,2})+$$

$$+\tilde{R}_{122\omega,2}\tilde{R}_{121\rho,1}(\tilde{R}_{122\omega,1}+\tilde{R}_{121\omega,2})(\tilde{R}_{122\rho,1}+\tilde{R}_{121\rho,2})-$$

$$-(\tilde{R}_{122\rho,1}+\tilde{R}_{121\rho,2})^2\tilde{R}_{121\omega,1}\tilde{R}_{122\omega,2}-(\tilde{R}_{122\omega,1}+\tilde{R}_{121\omega,2})^2\tilde{R}_{121\rho,1}\tilde{R}_{122\rho,2}-$$

$$-\tilde{R}_{121\omega,1}{}^2\tilde{R}_{122\rho,2}{}^2+2\tilde{R}_{121\omega,1}\tilde{R}_{121\rho,1}\tilde{R}_{122\omega,2}\tilde{R}_{122\rho,2}-\tilde{R}_{122\omega,2}{}^2\tilde{R}_{121\rho,1}{}^2]=$$

$$=R^3\tilde{R}_{1212}{}^2\sum_{\omega=3}^{n}\sum_{\rho=3}^{n}L_{\omega\rho}.$$

Так как $L_{\omega\rho}=L_{\rho\omega}$, $L_{\rho\rho}=0$ и $\tilde{R}_{1212}=-\frac{R}{2}$, то написанное выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{R^5}{2}\sum_{\rho>\omega>2}L_{\omega\rho}.$$

Но, в силу условия (62),

$$\tilde{R}_{121\omega,1}=k_\omega\tilde{R}_{121\delta,1}+l_\omega\tilde{R}_{121\varepsilon,1},\quad \tilde{R}_{122\omega,2}=k_\omega\tilde{R}_{122\delta,2}+l_\omega\tilde{R}_{122\varepsilon,2},$$
$$\tilde{R}_{122\omega,1}+\tilde{R}_{121\omega,2}=k_\omega(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})+l_\omega(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2}),$$
$$\tilde{R}_{121\rho,1}=k_\rho\tilde{R}_{121\delta,1}+l_\rho\tilde{R}_{121\varepsilon,1},\quad \tilde{R}_{122\rho,2}=k_\rho\tilde{R}_{122\delta,2}+l_\rho\tilde{R}_{122\varepsilon,2},$$
$$\tilde{R}_{122\rho,1}+\tilde{R}_{121\rho,2}=k_\rho(\tilde{R}_{122\delta,1}+\tilde{R}_{121\delta,2})+l_\rho(\tilde{R}_{122\varepsilon,1}+\tilde{R}_{121\varepsilon,2}).$$

Из этих равенств следует, что $L_{\omega\rho}=(k_\omega l_\rho-k_\rho l_\omega)^2L_{\delta\varepsilon}$. В таком случае

$$\frac{R^5}{2}\sum_{\rho>\omega>2}L_{\omega\rho}=\frac{R^5}{2}L_{\delta\varepsilon}\sum_{\rho>\omega>2}(k_\omega l_\rho-k_\rho l_\omega)^2.$$

Следовательно, неравенство (73) эквивалентно неравенству $L_{\delta\varepsilon}\cdot R<0$, что и требовалось доказать. (Разности $k_\omega l_\rho-k_\rho l_\omega$ не обращаются одновременно в нуль: одна из них равна единице.)

Предположим справедливость неравенства (73). В таком случае, с помощью формул (70) можно найти вещественные значения для p, q и r с точностью до знака.

Найдем выражения для p, q и r в инвариантной форме. Возведем обе части равенств (70) в квадрат, подставим λ^2 из (71) и просуммируем в числителях и знаменателях полученных дробей по всем δ, ε большим двух. Легко видеть, что p^2, q^2, r^2 можно представить в следующей инвариантной форме:

$$\left.\begin{aligned}p^2&=\frac{1}{K}T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1}\sigma_\gamma\sigma_\tau\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\tau_1},\\ q^2&=\frac{1}{K}T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1}\nu_{(\gamma}\sigma_{\tau)}\nu_{(\gamma_1}\sigma_{\tau_1)},\\ r^2&=\frac{1}{K}T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1}\nu_\gamma\nu_\tau\nu_{\gamma_1}\nu_{\tau_1},\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

где

$$K = \frac{R^2}{16} R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\nu)} R^{\lambda\mu}{}_{(\beta|\varepsilon|,\sigma)} R_{\lambda_1\mu_1(\gamma|\delta_1|,\xi)} R^{\lambda_1\mu_1}{}_{(\tau|\varepsilon_1|,\eta)} \cdot$$
$$\cdot \left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2} g^{\delta\delta_1}\right)\left(R^{\varepsilon\varepsilon_1} - \frac{R}{2} g^{\varepsilon\varepsilon_1}\right) \cdot R^{\alpha\beta\gamma\tau}\left(R^{\nu\xi\sigma\eta} + R^{\nu\eta\sigma\xi}\right) \ * \qquad (75)$$

и

$$T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1} = R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\nu)} R^{\lambda\mu}{}_{(\beta|\varepsilon|,\sigma)} R^{\alpha\gamma\beta\tau} R_{\lambda_1\mu_1(\alpha_1|\delta_1|,\nu_1)} R^{\lambda_1\mu_1}{}_{(\beta_1|\varepsilon_1|,\sigma_1)} \cdot$$
$$\cdot R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\tau_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2} g^{\delta\delta_1}\right)\left(R^{\varepsilon\varepsilon_1} - \frac{R}{2} g^{\varepsilon\varepsilon_1}\right) R^{\nu\sigma\nu_1\sigma_1}. \qquad (76)$$

Аналогично находим выражения для pq, pr, qr:

$$\left.\begin{aligned} pq &= -\frac{1}{K} T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1} \sigma_\gamma \sigma_\tau \nu_{(\gamma_1}\sigma_{\tau_1)}, \\ pr &= \frac{1}{K} T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1} \sigma_\gamma \sigma_\tau \nu_{\gamma_1} \nu_{\tau_1}, \\ qr &= -\frac{1}{K} T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1} \nu_{(\gamma}\sigma_{\tau)} \nu_{\gamma_1} \nu_{\tau_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Из полученных формул (74) и (77) определяем p, q и r с точностью до знака (знак одного из этих скаляров, не равного нулю, определяет знаки остальных). Формула (42) определяет, с точностью до знака, тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий, как это следует из предыдущих рассуждений, уравнениям Гаусса и Кодацци.

Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *В том случае, когда выполняется неравенство* (26), *необходимые и достаточные условия для того, чтобы n-мерное риманово пространство с положительно определенной фундаментальной квадратичной дифференциальной формой имело класс I и ранг второй фундаментальной квадратичной дифференциальной формы равнялся двум, даны уравнениями* (45), (63) *и* (66) *и неравенством* (73).

Заметим, что в этом случае коэффициенты второй фундаментальной формы определяются с точностью до знака, т. е. пространство н е и з г и б а е м о. (Равенство (26а) является, следовательно, необходимым условием для изгибаемости пространства.)

§ 5

Укажем другой метод решения задачи о необходимых и достаточных условиях для риманова пространства класса I. При применении этого метода не нужно предполагать существование неравенства (26). Будем считать, что тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, ранга 2, удовлетворяет уравнениям Гаусса и Кодацци.

Воспользуемся той частной системой координат, которая была применена в § 2. Так как $\Omega_{\alpha\beta,\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma,\beta}$ при всех значениях индексов α, β, γ, то в частности $\bar{\Omega}_{12,1} = \Omega_{11,2}$, $\bar{\Omega}_{12,2} = \bar{\Omega}_{22,1}$.

---

* Применяя равенства (74), (77) и (44), можно доказать, что

$$K = \frac{1}{4} T^{\gamma\tau\gamma_1\tau_1}\left(R_{\gamma\gamma_1\tau\tau_1} + R_{\gamma\tau_1\tau\gamma_1}\right).$$

С помощью последних равенств из (32) и (33) получаем два уравнения для определения $\overline{\Omega}_{22,1}$ и $\overline{\Omega}_{11,2}$:

$$2\overline{\Omega}_{22,1}\overline{R}_{121\delta,1}-\overline{\Omega}_{11,2}(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})=$$

$$=\frac{1}{\overline{\Omega}_{22}}\overline{R}_{122\delta,1}\overline{R}_{1212,2}+\frac{2}{\overline{\Omega}_{11}}\overline{R}_{121\delta,1}R_{1212,1}-\overline{\Omega}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,1}-\overline{\Omega}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,1},\qquad \delta>2;$$

$$2\overline{\Omega}_{11,2}\overline{R}_{122\delta,2}-\overline{\Omega}_{22,1}(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})=$$

$$=\frac{1}{\overline{\Omega}_{11}}\overline{R}_{121\delta,2}\overline{R}_{1212,1}+\frac{2}{\overline{\Omega}_{22}}\overline{R}_{122\delta,2}\overline{R}_{1212,2}-\overline{\Omega}_{11}R_{122\delta,2,2}-\overline{\Omega}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2},\qquad \delta>2.$$

Воспользовавшись равенством (21), находим из написанных выше уравнений выражения для $\overline{\Omega}_{22,1}$ и $\overline{\Omega}_{11,2}$:

$$\overline{\Omega}_{22,1}=\frac{1}{\overline{R}_{1212}[4\overline{R}_{121\delta,1}R_{122\delta,2}-(\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})^2]}\cdot$$
$$\cdot\{2\overline{R}_{122\delta,2}(\overline{R}_{1212,2}\overline{R}_{122\delta,1}-2\overline{R}_{1212,1}\overline{R}_{122\delta,2})\Omega_{11}+$$
$$+(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})(\overline{R}_{1212,1}\overline{R}_{121\delta,2}-2\overline{R}_{1212,2}R_{121\delta,1})\overline{\Omega}_{22}-$$
$$-R_{1212}[2R_{122\delta,2}(\overline{\Omega}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,1}+\overline{\Omega}_{22}R_{121\delta,1,1})+$$
$$+(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})(\overline{\Omega}_{11}R_{122\delta,2,2}+\overline{\Omega}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2})]\}\quad(\delta>2);\qquad(78)$$

$$\Omega_{11,2}=\frac{1}{\overline{R}_{1212}[4\overline{R}_{121\delta,1}\overline{R}_{122\delta,2}-(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})^2]}\cdot$$
$$\cdot\{(R_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})(R_{1212,2}\overline{R}_{122\delta,1}-2\overline{R}_{1212,1}\overline{R}_{122\delta,2})\overline{\Omega}_{11}+$$
$$+2R_{121\delta,1}(\overline{R}_{1212,1}R_{121\delta,2}-2R_{1212,2}R_{121\delta,1})\Omega_{22}-$$
$$-\overline{R}_{1212}[2R_{121\delta,1}(\overline{\Omega}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,2}+\Omega_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2})+$$
$$+(R_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})(\overline{\Omega}_{11}R_{122\delta,2,1}+\overline{\Omega}_{22}R_{121\delta,1,1})]\}\quad(\delta>2).\qquad(79)$$

Далее, из (31) следует, что

$$\overline{\Omega}_{11,1}=\frac{\overline{R}_{1212,1}-\overline{\Omega}_{11}\overline{\Omega}_{22,1}}{\overline{\Omega}_{22}},\qquad \overline{\Omega}_{22,2}=\frac{\overline{R}_{1212,2}-\overline{\Omega}_{22}\overline{\Omega}_{11,2}}{\overline{\Omega}_{11}}.$$

Подставляя в правые части этих равенств выражения для $\overline{\Omega}_{22,1}$ и $\overline{\Omega}_{11,2}$, данные формулами (78) и (79), имеем

$$\overline{\Omega}_{11,1}=\frac{\overline{\Omega}_{11}}{R_{1212}[4R_{121\delta,1}R_{122\delta,2}-(R_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})^2]}\cdot$$
$$\cdot\{2\overline{R}_{121\delta,1}\overline{R}_{1212,2}(2\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})-(\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})R_{1212,1}(\overline{R}_{122\delta,1}+2\overline{R}_{121\delta,2})+$$
$$+\Omega_{11}[2R_{122\delta,2}(\overline{\Omega}_{11}\overline{R}_{122\delta,2,1}+\Omega_{22}R_{121\delta,1,1})+$$
$$+(\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})(\Omega_{11}\overline{R}_{122\delta,2,2}+\overline{\Omega}_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2})]\}\quad(\delta>2);\qquad(80)$$

$$\overline{\Omega}_{22,2}=\frac{\overline{\Omega}_{22}}{R_{1212}[4\overline{R}_{121\delta,1}\overline{R}_{122\delta,2}-(R_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})^2]}\cdot$$
$$\cdot\{2\overline{R}_{122\delta,2}\overline{R}_{1212,1}(\overline{R}_{122\delta,1}+2\overline{R}_{121\delta,2})-(R_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})R_{1212,2}(2\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})+$$
$$+\Omega_{22}[2\overline{R}_{121\delta,1}(\Omega_{11}\overline{R}_{122\delta,2,2}+\Omega_{22}\overline{R}_{121\delta,1,2})+$$
$$+\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2,2})(\overline{\Omega}_{11}(\overline{R}_{1225,2,1}+\overline{\Omega}_{22}\overline{R}_{121\delta,,1\delta})]\}\quad(\delta>2).\qquad(81))$$

Кроме того,

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\Omega}_{2\delta,1}=\dfrac{\bar{R}_{121\delta,1}}{\bar{\Omega}_{11}},\quad \bar{\Omega}_{2\delta,2}=\dfrac{\bar{R}_{121\delta,2}}{\bar{\Omega}_{11}},\quad \bar{\Omega}_{1\delta,1}=-\dfrac{\bar{R}_{122\delta,1}}{\bar{\Omega}_{22}},\quad \bar{\Omega}_{1\delta,2}=-\dfrac{\bar{R}_{122\delta,2}}{\bar{\Omega}_{22}},\\ \Omega_{12,\delta}=\bar{\Omega}_{2\delta,1}=\bar{\Omega}_{1\delta,2},\quad \bar{\Omega}_{11,\delta}=\bar{\Omega}_{1\delta,1},\quad \bar{\Omega}_{22,\delta}=\bar{\Omega}_{2\delta,2}\qquad(\delta>0),\end{array}\right\}\tag{82}$$

$$\left.\begin{array}{c}\bar{\Omega}_{12,1}=\bar{\Omega}_{11,2},\quad \bar{\Omega}_{21,2}=\bar{\Omega}_{22,1},\quad \bar{\Omega}_{\alpha\beta,\gamma}=0,\\ \text{если, по крайней мере, два из значков } \alpha,\beta,\gamma \text{ больше двух.}\end{array}\right\}\tag{83}$$

Суммируя в числителях и знаменателях правых частей уравнений (78), (79), (80), (81) по δ (от 3 до n), получаем равенства, которым должны удовлетворять решения уравнений (2), (3) и (8):

$$\Omega_{\alpha\beta,\gamma}=\frac{6\left[R_{\delta(\alpha|\omega|\beta,\gamma)}\Omega_{\alpha\xi}-\frac{1}{4}\Omega_{(\alpha\beta}R_{\xi\delta\eta\omega|,\gamma)}\right]R^{\xi\delta\eta\omega}}{R^2}+$$

$$+\frac{4\Omega_{(\alpha|}{}^{\nu}R_{,\nu|}R_{\beta\gamma)}}{R^3}-\frac{\Omega_{\xi\eta}R^{\xi\delta\eta\omega}\left(R^{\varepsilon\rho}-\frac{R}{2}g^{\varepsilon\rho}\right)}{WR}\{[R_{\lambda\mu\delta\varepsilon,\omega,\nu}R^{\lambda\mu}{}_{\sigma\rho,}{}^{\nu}+$$

$$+R_{\lambda\mu\delta\varepsilon,\omega,\nu}R^{\lambda\mu\nu}{}_{\rho,\sigma}-2R_{\lambda\mu\delta\varepsilon,\omega,\sigma}R^{\lambda\mu\nu}{}_{\rho,\nu}]\,\Omega^{\sigma}{}_{(\alpha}\Omega_{\beta\gamma)}+$$

$$+2RR_{\lambda\mu\delta\varepsilon,\omega(\alpha}R_{|}{}^{\lambda\mu}{}_{\beta|\rho,\gamma)}+4R^{\nu\sigma}{}_{(\alpha|\varepsilon|,\beta}R_{|\lambda\mu|(\sigma|\rho|,\delta)}R_{|}{}^{\lambda\mu}{}_{|(\nu|\gamma|)\omega)}{}^{*}-$$

$$-R_{\lambda\mu(\alpha|\varepsilon|,\beta}R_{|}{}^{\lambda\mu}{}_{\delta\rho|,\gamma)}R_{,\omega}-\frac{1}{R}R_{,\nu}R^{\nu}{}_{(\alpha}R_{\lambda\mu\delta\varepsilon|,\beta}\,(R_{|}{}^{\lambda\mu}{}_{\omega\rho,\gamma)}+R_{|}{}^{\lambda\mu}{}_{|\gamma|\rho,\omega)}),\tag{84}$$

где

$$W=R_{\nu\sigma(\alpha|\lambda|,\beta)}R^{\nu\sigma}{}_{(\gamma|\mu|,\delta)}R^{\alpha\gamma\beta\delta}\left(R^{\lambda\mu}-\frac{R}{2}g^{\lambda\mu}\right)\tag{85}$$

(предполагаем, что $W\neq 0$).

Наоборот, если справедливы равенства (84), то выполняются уравнения Кодацци, так как $\Omega_{\alpha\beta,\gamma}$ равняется некоторому тензору $P_{\alpha\beta\gamma}$, симметричному относительно своих значков.

Система (84) представляет собою систему дифференциальных уравнений с несколькими неизвестными функциями. Кроме того, эти функции должны удовлетворять уравнениям (2) и (8). Оказывается, что можно свести задачу к интегрированию системы в полных дифференциалах с одной неизвестной функцией, на которую, помимо этих, не наложено никаких добавочных условий. Это можно осуществить следующим образом. Мы знаем, что общее решение уравнений (2) и (8) дается формулой (42), где p, q, r и ν_α, σ_α удовлетворяют соответственно уравнениям (44) и (49). Кроме того, функции p, q и r связаны зависимостями (55) (так как уравнения (13) остаются в силе: при их выводе мы не предполагали существование неравенства (26)).

---

* В этом слагаемом подразумевается симметрирование по индексам α, β, γ, по индексам σ, δ и по индексам ν, ω.

Из условия $W \neq 0$ следует, что

$$R_{\nu\sigma(\alpha|\lambda|,\beta)} \left(R^{\lambda}_{\mu} - \frac{R}{2}\delta^{\lambda}_{\mu}\right) \neq 0. \tag{86}$$

В таком случае, по крайней мере одно из уравнений (55) не обратится в тождество. В этом легко убедиться, воспользовавшись частной системой координат, примененной в § 4. Остальные уравнения (55), при существовании равенства (26а), будут следствиями указанного уравнения.

Заметим, что система уравнений в полных дифференциалах (84) получена без предположения о справедливости равенства (26а). Но, конечно, если бы оно не выполнялось, проще было бы решить задачу чисто алгебраическим путем — так, как это было указано в § 4.

Итак, предположим, что равенство (26а) выполняется. Тогда из уравнений (55) и (44) получатся две зависимости между p, q и r. Выразим две из этих величин через третью.

В частной системе координат, примененной в § 4, уравнения (55) обращаются или в тождества, или в равенства (61). Предположим для определенности, что в одном из уравнений (61) не равен нулю коэффициент при r, т. е. при некотором $\delta > 2$

$$\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{R}_{122\delta,2} - \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 (\tilde{R}_{122\delta,1} + \tilde{R}_{121\delta,2}) + \tilde{\sigma}_2^2 \tilde{R}_{121\delta,1} \neq 0. \tag{87}$$

Умножим обе части (61) на левую часть неравенства (92) и на $2\tilde{R}_{1212}$ и просуммируем по всем $\delta > 2$. В результате получим:

$$\begin{aligned} &pR_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}\nu_\gamma\nu_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda\mu}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) + \\ &+ 2qR_{\lambda\mu(\alpha,\delta|,\beta)}\nu_\gamma\sigma_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda\mu}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) + \\ &+ rR_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}\sigma_\gamma\sigma_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda u}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_\gamma\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) = 0, \end{aligned} \tag{88}$$

причем, ввиду существования неравенства (87),

$$R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}\sigma_\gamma\sigma_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda\mu}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) = 0. \tag{89}$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}\nu_\gamma\nu_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda\mu}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) = A, \\ R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}\nu_\gamma\sigma_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda\mu}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) = B, \\ R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\beta)}\sigma_\gamma\sigma_\sigma R^{\alpha\gamma\beta\sigma} R^{\lambda\mu}{}_{(\alpha_1|\delta_1|,\beta_1)}\sigma_{\gamma_1}\sigma_{\sigma_1} R^{\alpha_1\gamma_1\beta_1\sigma_1}\left(R^{\delta\delta_1} - \frac{R}{2}g^{\delta\delta_1}\right) = C. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Тогда уравнение (88) примет вид

$$Ap + 2Bq + Cr = 0. \tag{91}$$

Из этого равенства находим r (C по предположению не равно нулю) и подставляем в уравнение (44). В результате получаем

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{-Bp \pm \sqrt{(B^2 - AC)\,p^2 - \varepsilon C^2}}{C}, \\ r &= \frac{(2B^2 - AC)\,p \mp 2B\sqrt{(B^2 - AC)\,p^2 - \varepsilon C^2}}{C^2}. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Итак, q и r выражены через p.

Подставляя $\Omega_{\alpha\beta}$ из (42) в (84), находим

$$\nu_\alpha \nu_\beta p_{,\gamma} + (\nu_\alpha \sigma_\beta + \nu_\beta \sigma_\alpha)\, q_{,\gamma} + \sigma_\alpha \sigma_\beta r_{,\gamma} = f_{\alpha\beta\gamma},$$

где правая часть равенства зависит от p и известных функций от $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Не нарушая общности, можем считать ν_α и σ_α взаимно ортогональными векторами. Умножая обе части последнего уравнения на $\nu^\alpha \nu^\beta$, получаем

$$p_{,\gamma} = \frac{f_{\alpha\beta\gamma}\, \nu^\alpha \nu^\beta}{(\nu_\lambda \nu^\lambda)^2} = \varphi_\gamma, \tag{93}$$

где φ_γ — функция от p и $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Функция p должна удовлетворять приведенной выше системе уравнений в полных дифференциалах. Общее решение этой системы, если оно существует, содержит, самое большее, одну произвольную постоянную. Следовательно, q, r и $\Omega_{\alpha\beta}$ могут зависеть, самое большее, от одной произвольной постоянной.

Если система (93) имеет решение и тензор $\Omega_{\alpha\beta}$ может быть построен указанным образом, то вопрос о том, удовлетворяет ли он уравнениям Кодацци, решается непосредственной подстановкой.

Итак, когда выполнено равенство (26а), но $W \neq 0$, дан метод построения такого симметричного тензора 2-го порядка, ранга 2, который должен удовлетворять уравнениям Гаусса и Кодацци. Если такой тензор можно построить и если он действительно удовлетворяет указанным уравнениям (последнее выясняется проверкой), то составляющие тензора зависят, самое большее, от одного параметра.

§ 6

Предположим, что одновременно выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} &[R_{\lambda\mu(\alpha|\delta,\beta)} R^{\lambda\mu}{}_{(\gamma,\varepsilon',\sigma)} - R_{\lambda\mu(\alpha|\varepsilon,\beta)} R^{\lambda\mu}{}_{(\gamma|\delta|,\sigma)}] \cdot \\ &\qquad\qquad \left(R^\delta_\omega - \frac{R}{2}\,\delta^\delta_\omega\right)\left(R^\varepsilon_\nu - \frac{R}{2}\,\delta^\varepsilon_\nu\right) = 0, \\ &R_{\nu\sigma(\alpha\lambda',\beta)} R^{\nu\sigma}{}_{(\gamma'\mu|,\delta)} R^{\alpha\gamma\beta\delta}\left(R^{\lambda\mu} - \frac{R}{2}\, g^{\lambda\mu}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

и неравенство (86). Воспользуемся частной системой координат, введенной в § 2. Из равенств (94) находим

$$\left.\begin{array}{c}\overline{R}_{121\delta,1}\ (\overline{R}_{121\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon 2})-\overline{R}_{121\varepsilon,1}\ (\overline{R}_{122\delta,1}+{}_{121\delta,2}=0,\\ (\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2})R_{122\varepsilon,2}-(R_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\delta,1})\overline{R}_{126\delta,2}=0,\\ \overline{R}_{122\delta,2}\overline{R}_{121\varepsilon,1}-\overline{R}_{122\varepsilon,2}\overline{R}_{121\delta,1}=0,\\ \delta,\ \varepsilon>2,\end{array}\right\} \tag{95}$$

$$\sum_{\omega=3}^{n}[4\overline{R}_{121\omega,1}\overline{R}_{122\omega,2}-(\overline{R}_{122\omega,1}+\overline{R}_{121\omega,2})^2]=0. \tag{96}$$

На основании неравенства (86) заключаем, что имеется по крайней мере одно значение δ ($\delta>2$), для которого $\overline{R}_{121\delta,1}, \overline{R}_{122\delta,1},+\overline{R}_{121\delta,2}$, $\overline{R}_{122\delta,2}$ не равны одновременно нулю. Из (95) следует, что

$$\overline{R}_{121\varepsilon,1}=\lambda_\varepsilon\overline{R}_{121\delta,1},\quad \overline{R}_{122\varepsilon,1}+\overline{R}_{121\varepsilon,2}=\lambda_\varepsilon(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2});$$

$$\overline{R}_{122\varepsilon,2}=\lambda_\varepsilon\overline{R}_{122\delta,2},\quad \varepsilon>2.$$

Поэтому равенство (96) можно представить в следующем виде:

$$\left(\sum_{\omega=3}^{n}\lambda_\omega^2\right)\cdot[4\overline{R}_{121\delta,1}\overline{R}_{122\delta,2}-(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})^2]=0.$$

А так как λ_ω не равны одновременно нулю ($\lambda_\delta=1$), то для каждого $\delta>2$ выполняется равенство

$$4\overline{R}_{121\delta,1}R_{122\delta,2}-(R_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})^2=0. \tag{97}$$

Воспользуемся равенством (21). Оно получено из (13) и при выводе его не предполагалось существование неравенства (26). Имеем:

$$\overline{R}_{121\delta,1}=\mu_\delta\overline{\Omega}_{11},\quad \overline{R}_{122\delta,2}=-\mu_\delta\overline{\Omega}_{22}.$$

Следовательно,

$$-4\mu_\delta^2\Omega_{11}\overline{\Omega}_{22}-(\overline{R}_{122\delta,1}+\overline{R}_{121\delta,2})^2=0.$$

Но

$$\overline{\Omega}_{11}\Omega_{22}=\overline{R}_{1212}=-\frac{R}{2}.$$

Поэтому при $R<0$, $\mu_\delta=0$ и $\overline{R}_{122\delta,1}+R_{121\delta,2}$, $R_{121\delta,1}$, $\overline{R}_{122\delta,2}$ равны нулю при всяком $\delta>0$, т. е. справедливо равенство

$$R_{\nu\sigma(\alpha|\lambda|,\beta)}\left(R^\lambda_\mu-\frac{R}{2}\delta^\lambda_\mu\right)=0. \tag{98}$$

Итак, если пространство имеет класс I и ранг второй фундаментальной формы равен двум, то в том случае, когда справедливы равенства (94) и $R<0$, обязательно должно быть выполнено равенство (98). А так как мы предположили существование неравенства (86), то будем считать в этом параграфе, что $R>0$.

Воспользуемся равенствами (92). Они были получены независимо от предположения о неравенстве нулю W и поэтому остаются в силе. Легко доказать, пользуясь равенствами (94) и применяя ту частную

систему координат, которая была введена в § 4, справедливость следующего равенства:

$$AC - B^2 = 0. \tag{99}$$

Заметим, что $\varepsilon = -1$, так как знак ε обратен знаку R. Поэтому из (92) мы получаем следующие выражения для q и r:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{-Bp \pm C}{C}, \\ r &= \frac{Ap \mp 2B}{C}. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Следовательно [см. (42)],

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{p}{C}\,[C\nu_\alpha\nu_\beta - B(\nu_\alpha\sigma_\beta + \nu_\beta\sigma_\alpha) + A\sigma_\alpha\sigma_\beta] \pm \left(\nu_\alpha\sigma_\beta + \nu_\beta\sigma_\alpha - \frac{2B}{C}\sigma_\alpha\sigma_\beta\right).$$

Введя обозначение

$$\nu_\alpha - \frac{B}{C}\sigma_\alpha = \omega_\alpha, \tag{101}$$

получаем для тензора $\Omega_{\alpha\beta}$:

$$\Omega_{\alpha\beta} = p\omega_\alpha\omega_\beta \pm (\omega_\alpha\sigma_\beta + \omega_\beta\sigma_\alpha). \tag{102}$$

ω_α и σ_α — известные векторы. Функция p должна быть подобрана таким образом, чтобы были соблюдены уравнения Кодацци.

Подставляя $\Omega_{\alpha\beta}$ в эти уравнения, получаем систему дифференциальных уравнений для определения функции p:

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} = p_{,\gamma}\omega_\alpha\omega_\beta - p_{,\beta}\omega_\alpha\omega_\gamma + p(\omega_{\alpha,\gamma}\omega_\beta + \omega_\alpha\omega_{\beta,\gamma} - \omega_{\alpha,\beta}\omega_\gamma - \omega_\alpha\omega_{\gamma,\beta}) \pm$$
$$\pm (\omega_{\alpha,\gamma}\sigma_\beta + \omega_\alpha\sigma_{\beta,\gamma} + \omega_{\beta,\gamma}\sigma_\alpha + \omega_\beta\sigma_{\alpha,\gamma} - \omega_{\alpha,\beta}\sigma_\gamma - \omega_\alpha\sigma_{\gamma,\beta} - \omega_{\gamma,\beta}\sigma_\alpha - \omega_\gamma\sigma_{\alpha,\beta}) = 0. \tag{103}$$

Изучим свойства вектора ω_α. Пользуясь частной системой координат, введенной в § 4, и уравнением (101), определяющим вектор ω_α, легко доказать справедливость следующих равенств ($\delta > 2$):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}_1(\overline{R}_{122\delta,1} + \overline{R}_{121\delta,2}) - 2\tilde{\omega}_2\overline{R}_{121\delta,1} &= 0, \\ 2\tilde{\omega}_1\tilde{R}_{122\delta,2} - \tilde{\omega}_2(\tilde{R}_{122\delta,1} + \tilde{R}_{121\delta,2}) &= 0, \\ \tilde{\omega}_\delta = 0 \quad \text{при} \quad \delta > 0. & \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Следовательно,

$$[\omega_\alpha R_{\lambda\mu(\beta|\delta|,\sigma)} - \omega_\beta R_{\lambda\mu(\alpha|\delta|,\sigma)}]\left(R^\delta_\nu - \frac{R}{2}\delta^\delta_\nu\right) = 0. \tag{105}$$

Будем считать p некоторой определенной функцией от координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, определяемый равенством (102), удовлетворяет уравнениям (2) и (13). Следовательно, для этого тензора справедливы и равенства (24) и (25). Воспользовавшись формулами (104) (заметим, что система координат, введенная в § 2, представляет собой специальный случай системы, рассмотренной в § 4, и поэтому обладает всеми ее свойствами), приходим к равенствам *

* Из равенств (21) и (97) и неравенства (86) следует, что должно быть некоторое $\delta > 2$, при котором $\overline{R}_{121\delta,1}$, $\overline{R}_{122\delta,2}$ не равны нулю.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\Phi}_{12\sigma}\bar{\omega}_2-\bar{\Phi}_{22\sigma}\bar{\omega}_1=0,\\ \bar{\Phi}_{12\sigma}\bar{\omega}_1-\bar{\Phi}_{11\sigma}\bar{\omega}_2=0.\end{aligned}\quad(\sigma>2)\right\}\tag{106}$$

Принимая во внимание, что $\bar{\omega}_\delta=0$, $\bar{\Phi}_{\delta\alpha\nu}=0$, при $\delta>2$, приходим к выводу, что для тензора $\Omega_{\alpha\beta}$ справедливы следующие равенства:

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}\omega_\delta+\Phi_{\alpha\gamma\delta}\omega_\beta+\Phi_{\alpha\delta\beta}\omega_\gamma=0.\tag{107}$$

Применяя равенства (103), получаем для суммы, стоящей в левой части уравнения (107), такое выражение:

$$\begin{gathered}\omega_\alpha\left[(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})\,\omega_\delta+(\omega_{\gamma,\delta}-\omega_{\delta,\gamma})\,\omega_\beta+(\omega_{\delta,\beta}-\omega_{\beta,\delta})\,\omega_\gamma\right]p\pm\\ \pm\{\sigma_\alpha\left[(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\delta})\,\omega_\delta+(\omega_{\gamma,\delta}-\omega_{\delta,\gamma})\,\omega_\beta+(\omega_{\delta,\beta}-\omega_{\beta,\delta})\,\omega_\gamma\right]+\\ +\left[(\sigma_{\beta,\gamma}-\sigma_{\gamma,\beta})\omega_\delta+(\sigma_{\gamma,\delta}-\sigma_{\delta,\gamma})\,\omega_\beta+(\sigma_{\delta,\beta}-\sigma_{\beta,\delta})\omega_\gamma\right]\omega_\alpha+\omega_{\alpha,\beta}\xi_{\gamma\delta}+\omega_{\alpha,\gamma}\xi_{\delta\beta}+\omega_{\alpha,\delta}\xi_{\beta\gamma}\}.\end{gathered}$$

Но так как эта сумма равна нулю при всяком p, то справедливы равенства:

$$(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})\,\omega_\delta+(\omega_{\gamma,\delta}-\omega_{\delta,\gamma})\,\omega_\beta+(\omega_{\delta,\beta}-\omega_{\beta,\delta})\,\omega_\gamma=0\tag{108}$$

и

$$[(\sigma_{\beta,\gamma}-\sigma_{\gamma,\beta})\,\omega_\delta+(\sigma_{\gamma,\delta}-\sigma_{\delta,\gamma})\,\omega_\beta+(\sigma_{\delta,\beta}-\sigma_{\beta,\delta})\,\omega_\gamma]\,\omega_\alpha+\omega_{\alpha,\beta}\xi_{\gamma\delta}+\omega_{\alpha,\gamma}\xi_{\delta\beta}+\omega_{\alpha,\delta}\xi_{\beta\gamma}=0.$$

Последнее уравнение после некоторых преобразований принимает вид:

$$\begin{gathered}(\xi_{\beta\gamma,\delta}+\xi_{\gamma\delta,\beta}+\xi_{\delta\beta,\gamma})\,\omega_\alpha+\xi_{\alpha\beta}\,(\omega_{\gamma,\delta}-\omega_{\delta,\gamma})+\xi_{\alpha\gamma}\,(\omega_{\delta,\beta}-\omega_{\beta,\delta})+\xi_{\alpha\delta}\,(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})+\\ +\omega_{\alpha,\delta}\xi_{\beta\gamma}+\omega_{\alpha,\beta}\xi_{\gamma\delta}+\omega_{\alpha,\gamma}\xi_{\delta\beta}=0.\end{gathered}\tag{109}$$

Равенства (108) и (109) можно было бы получить и непосредственно, не обращаясь к результатам § 2, а дифференцируя уравнения (105). Но это более длинный путь.

Применяя равенства (103), находим

$$\begin{gathered}\omega_\nu\Phi_{\alpha\beta\gamma}-\omega_\alpha\Phi_{\nu\beta\gamma}=p\left[\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\omega_\gamma)-\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\nu,\beta}\omega_\gamma)\right]\pm\\ \pm\left[\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\sigma_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\sigma_\gamma+\omega_\beta\sigma_{\alpha,\gamma}-\omega_\gamma\sigma_{\alpha,\beta})-\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\sigma_\beta-\omega_{\nu,\beta}\sigma_\gamma+\omega_\beta\sigma_{\nu,\gamma}-\omega_\gamma\sigma_{\nu,\beta})+\right.\\ \left.+(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})\,\xi_{\nu\alpha}\right].\end{gathered}$$

Предполагая справедливость уравнений Кодацци, мы получаем следующую систему уравнений для функции p:

$$\begin{gathered}p\left[\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\omega_\gamma)-\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\nu,\beta}\omega_\gamma)\right]\pm\\ \pm\left[\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\sigma_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\sigma_\gamma+\omega_\beta\sigma_{\alpha,\gamma}-\omega_\gamma\sigma_{\alpha,\beta})-\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\sigma_\beta-\omega_{\nu,\beta}\sigma_\gamma+\omega_\beta\sigma_{\nu,\gamma}-\omega_\gamma\sigma_{\nu,\beta})+\right.\\ \left.+(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})\,\xi_{\nu\alpha}\right]=0.\end{gathered}\tag{110}$$

Если

$$\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\omega_\gamma)-\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\nu,\beta}\omega_\gamma)\neq0,\tag{111}$$

то p определяется с точностью до знака, и вопрос о том — удовлетворяются ли уравнения Кодацци, решается непосредственной подстановкой. При положительном ответе пространство имеет класс I и оно неизгибаемо. В том случае, когда справедливо равенство:

$$\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\omega_\gamma)-\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\nu,\beta}\omega_\gamma)=0,\tag{112}$$

необходимым условием является существование равенства:

$$\begin{gathered}\omega_\nu\,(\omega_{\alpha,\gamma}\sigma_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\sigma_\gamma+\omega_\beta\sigma_{\alpha,\gamma}-\omega_\gamma\sigma_{\alpha,\beta})-\\ -\omega_\alpha\,(\omega_{\nu,\gamma}\sigma_\beta-\omega_{\nu,\beta}\sigma_\gamma+\omega_\beta\sigma_{\nu,\gamma}-\omega_\gamma\sigma_{\nu,\beta})+(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})\,\xi_{\nu\alpha}=0.\end{gathered}$$

После некоторых преобразований этому равенству можно придать следующий вид:

$$2\sigma_\nu(\omega_{\alpha,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\alpha,\beta}\omega_\gamma)-2\sigma_\alpha(\omega_{\nu,\gamma}\omega_\beta-\omega_{\nu,\beta}\omega_\gamma)+$$
$$+\omega_{\alpha,\gamma}\xi_{\nu\beta}+\omega_\beta\xi_{\nu\alpha,\gamma}+\xi_{\alpha\gamma}\omega_{\nu,\beta}-\omega_{\alpha,\beta}\xi_{\nu\gamma}-\omega_\gamma\xi_{\nu\alpha,\beta}-\xi_{\alpha\beta}\omega_{\nu,\gamma}+$$
$$+(\omega_{\beta,\gamma}-\omega_{\gamma,\beta})\xi_{\nu\alpha}=0. \tag{113}$$

Предположим существование равенств (112) и (113). В таком случае для любого p

$$\omega_\nu\Phi_{\alpha\beta\gamma}-\omega_\alpha\Phi_{\nu\beta\gamma}=0. \tag{114}$$

Пусть в некоторой системе координат составляющая ω_β (β — определенное значение индекса) в рассматриваемой нами области не равна нулю. Тогда из равенств (107) и (114) следует, что в этой системе координат и указанной области уравнения Кодацци, составленные для тензора $\Omega_{\alpha\beta}$, данного формулой (102), будут следствиями уравнений

$$\Phi_{\beta\beta\gamma}=0 \quad (\gamma\neq\beta). \tag{115}$$

Поэтому достаточно, чтобы функция p удовлетворяла системе (115), состоящей из $n-1$ уравнения.

Для упрощения равенств (103) и, в частности, равенств (115), рассмотрим выражение $\omega_\alpha dx^\alpha$. На основании (108) заключаем, что это выражение имеет интегрирующий множитель μ *. Иначе говоря, существует функция z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{dz}{dx^\alpha}=\mu\omega_\alpha.$$

Для этой функции справедливы равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\,\omega_\beta-\frac{\partial z}{\partial x^\beta}\,\omega_\alpha=0. \tag{116}$$

Рассмотрим некоторое решение z этой системы. Введем новую систему координат $'x^1, 'x^2, \ldots, 'x_n$, положив $'x^1=z$ и поставив требование, чтобы $\left|\frac{\partial' x^\lambda}{\partial x^\mu}\right|$ не обращался в рассматриваемой области в нуль. Тогда, как видно из (103) и (116), уравнения Кодацци не будут содержать производной от p по $'x^1$. Обозначим результат преобразования $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ к новым переменным через $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$.

На основании сказанного заключаем, что все уравнения Кодацци будут следствиями уравнений

$$\Psi_{\beta\beta\gamma}=0 \qquad (\gamma\neq\beta) \tag{117}$$

(β — определенное значение индекса).

---

* См. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partiel-les du premier ordre, 1921, p. 126.

Заметим, кстати, что

$$\omega_{\alpha,\beta}-\omega_{\beta,\alpha}=\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\omega_\beta}{\partial x^\alpha}.$$

Эти уравнения содержат лишь производные от p по $'x^2, 'x^3, \ldots, 'x^n$ и могут быть разрешены относительно этих производных (ранг матрицы из коэффициентов при производных равен $n-1$, так как он равнялся этому числу до преобразования координат). Таким образом, мы приходим к системе уравнений в полных дифференциалах с одной неизвестной функцией p и $n-1$ независимыми переменными $'x^2, 'x^3, \ldots, 'x^n$ ($'x^1$ играет роль параметра). Общее решение этой системы — если оно существует — может зависеть, самое большее, от одной произвольной функции от $'x^1$, т. е. может иметь такой вид:

$$p = \pm F('x^1, 'x^2, \ldots, 'x^n, \theta('x^1)), \tag{118}$$

где θ — произвольная функция. Подставляя найденное таким образом p в уравнение (102), получаем тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий уравнениям Гаусса и Кодацци.

Итак, в том случае, когда выполнены равенства (94), (112) и (113) и неравенство (86), необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство было класса I, является существование решения у системы в полных дифференциалах (117). В том случае, когда решение существует, выражение для тензора $\Omega_{\alpha\beta}$ содержит, самое большее, одну произвольную функцию одного аргумента.

§ 7

Предположим, наконец, что выполнено равенство (98). Применяя систему координат, введенную в § 2, находим

$$\overline{R}_{121\delta,1} = 0, \quad \overline{R}_{122\delta,1} + \overline{R}_{121\delta,2} = 0, \quad \overline{R}_{122\delta,2} = 0 \qquad (\delta > 2).$$

Следовательно,

$$\overline{\Omega}_{2\delta,1} = 0, \quad \Omega_{11}\Omega_{2\delta,2} - \Omega_{22}\overline{\Omega}_{1\delta,1} = 0, \quad \overline{\Omega}_{1\delta,2} = 0 \qquad (\delta > 2).$$

Предполагая справедливость уравнений Кодацци, получаем:

$$\overline{\Omega}_{12,\delta} = 0, \quad \overline{\Omega}_{11}\overline{\Omega}_{22,\delta} - \overline{\Omega}_{22}\Omega_{11,\delta} = 0 \qquad (\delta > 2).$$

С другой стороны,

$$\overline{\Omega}_{11}\Omega_{22,\delta} + \overline{\Omega}_{22}\Omega_{11,\delta} = \overline{R}_{1212,\delta} = -\frac{1}{2} R_{,\delta}.$$

Следовательно,

$$\overline{\Omega}_{11,\delta} = \frac{\overline{R}_{1212,\delta}}{2\Omega_{22}} = \frac{\overline{R}_{1212,\delta}\overline{\Omega}_{11}}{2\overline{R}_{1212}} = \frac{1}{2}\overline{\Omega}_{11}\frac{R_{,\delta}}{R}, \quad \overline{\Omega}_{22,\delta} = \frac{1}{2}\Omega_{22}\frac{R_{,\delta}}{R}, \quad \overline{\Omega}_{12,\delta} = 0, \quad \delta > 2.$$

На основании приведенных равенств заключаем, что симметричный тензор $\Omega_{\alpha\beta}$ ранга 2, удовлетворяющий уравнениям Гаусса и Кодацци, должен быть решением системы

$$\left(\Omega_{\alpha\beta,\delta} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\frac{R_{,\delta}}{R}\right)\left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right) = 0.$$

Ее можно представить в таком виде:

$$\left(\frac{\Omega_{\alpha\beta}}{\sqrt{|R|}}\right)_{,\delta}\left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right) = 0. \tag{119}$$

Подставив в эти уравнения значения $\Omega_{\alpha\beta}$ из (42), находим

$$(p_{,\delta}\nu_\alpha\nu_\beta + q_{,\delta}(\nu_\alpha\sigma_\beta + \nu_\beta\sigma_\alpha) + r_{,\delta}\sigma_\alpha\sigma_\beta)\left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right) = f_{\alpha\beta\lambda}(x^1, \ldots, x^n, p, q, r),$$

где $f_{\alpha\beta\lambda}$ — известная функция от своих аргументов. Не нарушая общности, можем предположить, что ν_α, σ_α будут взаимно ортогональными векторами. Умножая обе части нашего равенства сначала на $\nu^\alpha\nu^\beta$, а затем $\nu^\alpha\sigma^\beta$ и исключая r с помощью равенства (44), приходим к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} p_{,\delta}\left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right) &= \psi_\lambda(x^1, \ldots, x^n, p, q), \\ q_{,\delta}\left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right) &= \vartheta_\lambda(x^1, \ldots, x^n, p, q). \end{aligned}\right\} \quad (120)$$

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$X_\lambda(z) = \left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right)\frac{\partial z}{\partial x^\delta} = 0. \quad (121)$$

Введем обозначение $R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda = a^\delta_\lambda$. Тогда система (121) примет вид $a^\delta_\lambda \frac{\partial z}{\partial x^\delta} = 0$. Докажем, что она замкнутая. Составим скобки Пуассона (X_λ, X_μ):

$$(X_\lambda, X_\mu) = [X_\lambda(a^\nu_\mu) - X_\mu(a^\nu_\lambda)]\frac{\partial z}{\partial x^\nu} = \left[a^\delta_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\delta}(a^\nu_\mu) - a^\delta_\mu \frac{\partial}{\partial x^\delta}(a^\nu_\lambda)\right]\frac{\partial z}{\partial x^\nu} =$$

$$= [a^\delta_\lambda(a^\nu_{\mu,\delta} + \Gamma_{\mu\delta}{}^\varepsilon a^\lambda_\varepsilon - \Gamma_{\varepsilon\delta}{}^\nu a^\varepsilon_\mu) - a^\delta_\mu(a^\nu_{\lambda,\delta} + \Gamma_{\lambda\delta}{}^\varepsilon a^\nu_\varepsilon - \Gamma_{\varepsilon\delta}{}^\nu a^\varepsilon_\lambda)]\frac{\partial z}{\partial x^\nu} =$$

$$= (a^\nu_{\mu,\delta}a^\delta_\lambda - a^\nu_{\lambda,\delta}a^\delta_\mu)\frac{\partial z}{\partial x^\nu} + (a^\delta_\lambda\Gamma_{\mu\delta}{}^\varepsilon - a^\delta_\mu\Gamma_{\lambda\delta}{}^\varepsilon)X_\varepsilon.$$

Изучим тензор $a^\nu_{\mu,\delta}a^\delta_\lambda - a^\nu_{\lambda,\delta}a^\delta_\mu$. Пользуясь частной системой координат, примененной в § 4, легко доказать, что этот тензор равен

$$\frac{R_{,\varepsilon}}{R}(a^\nu_\mu a^\varepsilon_\lambda - a^\nu_\lambda a^\varepsilon_\mu).$$

Следовательно,

$$(X_\lambda, X_\mu) = \frac{R_{,\varepsilon}}{R}\left[\left(R^\varepsilon_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\varepsilon_\lambda\right)X_\mu - \left(R^\varepsilon_\mu - \frac{R}{2}\delta^\varepsilon_\lambda\right)X_\lambda\right] +$$
$$\left[\left(R^\delta_\lambda - \frac{R}{2}\delta^\delta_\lambda\right)\Gamma_{\mu\delta}{}^\varepsilon - \left(R^\delta_\mu - \frac{R}{2}\delta^\delta_\mu\right)\Gamma_{\lambda\delta}{}^\varepsilon\right]X_\varepsilon, \quad (122)$$

т. е. система (121) замкнутая. Ранг матрицы, составленной из коэффициентов при производных, равен $n-2$, поэтому система имеет два независимых решения z^1 и z^2. Введем новые координаты $'x^1, 'x^2, \ldots$ $\ldots, 'x^n$, положив $'x^1 = z^1$, $'x^2 = z^2$ и ставя условие, чтобы определитель $\left|\frac{\partial' x^\lambda}{\partial x^\mu}\right|$ был в рассматриваемой области отличен от нуля.

В таком случае уравнения (120), преобразованные к новым переменным, не будут содержать производных по $'x^1$, $'x^2$.

Возобновляя рассуждения, приведенные в конце предыдущего параграфа, приходим к выводу, что при интегрировании системы (120) может встретиться один из следующих четырех случаев:

1. Система не имеет решения. Тогда пространство не будет пространством класса I.

2. Из системы (120) находим определенные выражения для p и q через $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Вопрос о том, удовлетворяет ли тензор $\Omega_{\alpha\beta}$ уравнениям Кодацци, решается простой проверкой.

3. В выражения для p и q входит одна произвольная функция θ от $'x^1$, $'x^2$, т. е.

$$p=\varphi('x^1, 'x^2, \ldots, 'x^n, \theta('x^2, 'x^2)),$$
$$q=\psi('x^1, 'x^2, \ldots, 'x^n, \theta('x^1, 'x^2)).$$

4. Общее решение системы (120) зависит от двух произвольных функций θ и ω от $'x^1$, $'x^2$, т. е.

$$p=\varphi('x^1, 'x^2, \ldots, 'x^n, \theta('x^1,'x^2), \omega('x^1, 'x^2)),$$
$$q=\psi('x^1, 'x^2, \ldots, 'x^n, \theta('x, 'x^2), \omega('x^1, 'x^2)).$$

Условимся в дальнейшем не ставить штрихи у координат.

Рассмотрим теперь случай 3. Определяя r из уравнения (44), находим

$$\left.\begin{aligned} p&=\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta(x^1, x^2)),\\ q&=\psi(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta(x^1, x^2)),\\ r&=f(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta(x^1, x^2)). \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Для определения функции θ используем уравнения Кодацци. Если мы подставим в них $\Omega_{\alpha\beta}$ из (42), то они примут следующий вид:

$$p_{,\gamma}\nu_\alpha\nu_\beta+q_{,\gamma}(\nu_\alpha\sigma_\beta+\nu_\beta\sigma_\alpha)+r_{,\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta-p_{,\beta}\nu_\alpha\nu_\gamma-q_{,\beta}(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)-r_{,\beta}\sigma_\alpha\sigma_\gamma=$$
$$=F_{\alpha\beta\gamma}(p, q, r, x^1, x^2, \ldots, x^n). \quad (124)$$

Подставляя вместо p, q и r их выражения, данные равенствами (123), получаем систему уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией θ.

Полагаем сначала в (124) $\beta>2$, $\gamma>2$. Легко видеть, что в этом случае уравнения (124) не содержат производных от функции θ. Здесь могут представиться следующие случаи:

1. Из указанных уравнений следует зависимость между $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

2. θ определяется как функция не только от x^1 и x^2, но и от других координат.

3. θ определяется как функция от x^1 и x^2.

4. Эти уравнения обращаются в тождества.

В первых двух случаях пространство не будет пространством класса I. В случае 3 вопрос решается непосредственной подстановкой полученной функции θ в остальные уравнения Кодацци.

Исследуем случай 4. Нам осталось рассмотреть уравнения $\Phi_{\alpha 1\gamma}=0$, $\Phi_{\alpha 2\gamma}=0$ $(\gamma>2,\ \alpha=1, 2, \ldots, n)$, $\Phi_{112}=0$, $\Phi_{212}=0$.

Полагая в (124) $\gamma>2$, $\beta=1, 2$ и применяя уравнения (123), полу-

чаем для функции θ следующую систему уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned}\left[\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right]\theta_{,1}=U_{\alpha 1\gamma}(x^1,x^2,\ldots,x^n,\theta),\\ \left[\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,2}=U_{\alpha 2\gamma}(x^1,x^2,\ldots,x^n,\theta),\end{aligned}\right\}\quad(125)$$

где $U_{\alpha 1\gamma}$ и $U_{\alpha 2\gamma}$ — известные функции от своих аргументов.

Здесь могут быть следующие возможности:

1. Сумма $\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\theta}$ хоть при одной паре из указанных значений α и γ не зависит от θ и не обращается тождественно в нуль. В этом случае дело сводится к интегрированию системы уравнений в полных дифференциалах; если решение существует, то оно зависит, самое большее, от одной произвольной постоянной. Вопрос о справедливости остальных уравнений Кодацци решается простой проверкой.

2. Некоторые из сумм $\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\theta}$ зависят от θ, остальные тождественно равны нулю. После исследования значений θ *, обращающих одну из таких сумм в нуль, и исключения этих значений в дальнейшем из рассмотрения, приходим к предыдущему случаю.

3. Все суммы $\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\theta}$ тождественно равны нулю при указанных значениях α и γ. Предполагаем, что и правые части (125) — тождественные нули**.

Обратимся к уравнениями $\Phi_{112}=0$, $\Phi_{212}=0$. Они имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}&\left[\nu_1^2\frac{\partial p}{\partial\theta}+2\nu_1\sigma_1\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_1^2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,2}-\\ &-\left[\nu_1\nu_2\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_1\sigma_2+\nu_2\sigma_1)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_1\sigma_2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,1}=U_{112}(x^1,\ldots,x^n,\theta),\\ &\left[\nu_1\nu_2\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_1\sigma_2+\nu_2\sigma_1)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_1\sigma_2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,2}-\\ &-\left[\nu_2^2\frac{\partial p}{\partial\theta}+2\nu_2\sigma_2\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_2^2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,1}=U_{212}(x^1,\ldots,x^n,\theta).\end{aligned}\right\}\quad(126)$$

Рассматриваем эти уравнения, как систему двух уравнений с двумя неизвестными $\theta_{,1}$ и $\theta_{,2}$. Если определитель системы не равен тождественно нулю, то дело сводится к интегрированию системы уравнений

---

* Исследования — имеются ли среди этих θ такие, которые зависят только от x^1 и x^2 и удовлетворяют уравнения Кодацци.

** Случай, когда мы имеем несколько уравнений, связывающих $x^1,\ldots,x^n,\theta$, разобран нами выше.

в полных дифференциалах и к изучению тех значений θ, которые обращают в нуль указанный определитель. Тогда θ может зависеть, самое большее, от одной произвольной постоянной.

В том случае, когда определитель тождественно равен нулю, должны быть выполнены условия совместности системы. Если эти условия удовлетворяются тождественно, то для определения функции θ у нас имеется одно уравнение в частных производных. Заметим, что по крайней мере один из коэффициентов при производных $\theta_{,1}$ и $\theta_{,2}$ в уравнениях (126) не равен тождественно нулю (иначе мы имели бы $\frac{\partial p}{\partial \theta}=\frac{\partial q}{\partial \theta}=\frac{\partial r}{\partial \theta}\equiv 0$, что очевидно невозможно, так как мы заранее предположили, что, по крайней мере, одна из функций p, q зависит от θ). Предположим для определенности, что $\nu_1^2\frac{\partial p}{\partial \theta}+2\nu_1\sigma_1\frac{\partial q}{\partial \theta}+\sigma_1^2\frac{\partial r}{\partial \theta}\not\equiv 0$.

Исследовав отдельно те значения θ, которые обращают эту сумму в нуль, и исключив их затем из рассмотрения, мы можем привести первое из уравнений (126) к следующему виду:

$$\theta_{,2}=F(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta_{,1}\theta). \tag{127}$$

Общее решение уравнения (127) зависит от одной произвольной функции от x^1 *. На основании сделанных предположений заключаем, что это общее решение удовлетворяет всем уравнениям Кодацци**. Итак, в том случае, когда p, q и r даны равенствами (123), если существует тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий уравнениям Кодацци, то он зависит, самое большее, от одной произвольной функции одного аргумента.

Предположим теперь, что общее решение системы (120) содержит две произвольные функции от двух координат, т. е.

$$\left.\begin{aligned} p&=\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta(x^1, x^2), \omega(x^1, x^2)),\\ q&=\psi(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta(x^1, x^2), \omega(x^1, x^2)),\\ r&=f(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta(x^1, x^2), \omega(x^1, x^2)). \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Функции θ и ω должны быть подобраны таким образом, чтобы p, q и r удовлетворяли уравнениям (124). При исследовании этих уравнений для случая $\beta>2$, $\gamma>2$ нам придется почти дословно повторить те рассуждения, которые были приведены при рассмотрении одной неизвестной функции.

Заметим, что если из уравнений $\Phi_{\alpha\beta\gamma}=0$ при $\beta>2$, $\gamma>2$ следует зависимость между ω, θ, x^1, x^2, то дело сводится к предыдущему случаю.

---

* См. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre, p. 2, 1921.

** Мы говорим о таком решении, которое зависит лишь от x^1 и x^2.

Рассмотрим случай, когда указанные уравнения обращаются в тождества. Исследуем равенства $\Phi_{\alpha 1\gamma}=0$, $\Phi_{\alpha 2\gamma}=0$, $\alpha=1, 2, \ldots, n$, $\gamma>2$. Их можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\left[\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,1}+\\&+\left[\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\omega}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]\omega_{,1}=V_{\alpha 1\gamma}(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta, \omega),\\&\left[\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,2}+\\&+\left[\nu_\alpha\nu_\gamma\frac{\partial p}{\partial\omega}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\frac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]\omega_{,2}=V_{\alpha 2\gamma}(x^1, x^2, \ldots, x^n, \theta, \omega).\end{aligned}\right\}\quad(129)$$

Если не все определители

$$\begin{vmatrix}\nu_\alpha\nu_\gamma\dfrac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\dfrac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\dfrac{\partial r}{\partial\theta} & \nu_\alpha\nu_\gamma\dfrac{\partial p}{\partial\omega}+(\nu_\alpha\sigma_\gamma+\nu_\gamma\sigma_\alpha)\dfrac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_\alpha\sigma_\gamma\dfrac{\partial r}{\partial\omega}\\ \nu_\beta\nu_\delta\dfrac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_\beta\sigma_\delta+\nu_\delta\nu\ )\dfrac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_\beta\sigma_\delta\dfrac{\partial r}{\partial\theta} & \nu_\beta\nu_\delta\dfrac{\partial p}{\partial\omega}+(\nu_\beta\sigma_\delta+\nu_\delta\sigma_\beta)\dfrac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_\beta\sigma_\delta\dfrac{\partial r}{\partial\omega}\end{vmatrix}$$

$$(\alpha, \beta=1,2, \ldots, n, \quad \gamma, \delta>2)$$

тождественно равны нулю, то задача сводится к интегрированию системы уравнений в полных дифференциалах с двумя неизвестными функциями и к исследованию тех значений θ и ω, которые обращают указанные определители в нуль. В этом случае тензор $\Omega_{\alpha\beta}$ может зависеть самое большее от двух произвольных постоянных.

Предполагая, что все приведенные выше определители тождественно равны нулю, мы приходим к следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}&\xi_{\gamma\delta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} & \dfrac{\partial p}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial q}{\partial\theta} & \dfrac{\partial q}{\partial\omega}\end{vmatrix}=0,\qquad \xi_{\gamma\delta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial q}{\partial\theta} & \dfrac{\partial q}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial r}{\partial\theta} & \dfrac{\partial r}{\partial\omega}\end{vmatrix}=0,\qquad \xi_{\gamma\delta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} & \dfrac{\partial p}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial r}{\partial\theta} & \dfrac{\partial r}{\partial\omega}\end{vmatrix}=0,\\&\nu_\gamma\nu_\delta\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} & \dfrac{\partial p}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial q}{\partial\theta} & \dfrac{\partial q}{\partial\omega}\end{vmatrix}+\sigma_\gamma\sigma_\delta\begin{vmatrix}\dfrac{\partial q}{\partial\theta} & \dfrac{\partial q}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial r}{\partial\theta} & \dfrac{\partial r}{\partial\omega}\end{vmatrix}+\nu_{(\gamma}\sigma_{\delta)}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p}{\partial\theta} & \dfrac{\partial p}{\partial\omega}\\ \dfrac{\partial r}{\partial\theta} & \dfrac{\partial r}{\partial\omega}\end{vmatrix}=0\qquad(\gamma, \delta>2).\end{aligned}\right\}\quad(130)$$

Так как определитель $\dfrac{D(p, q)}{D(\theta, \omega)}\neq 0$ то

$$\xi_{\gamma\delta}=0, \qquad \Omega_{\gamma\delta}=0, \qquad \gamma,\delta>2. \qquad (130a)$$

Последнее равенство получается после исключения $\dfrac{\partial r}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial r}{\partial\omega}$ с помощью соотношения (44). Полагая в нем $\delta=\gamma$, находим $p\nu_\gamma^2+2q\nu_\gamma\sigma_\gamma+r\sigma_\gamma^2=0$ $(\gamma>2)$ (или применяя еще раз равенство (44)) $(p\nu_\gamma+q\sigma_\gamma)^2+\varepsilon\sigma_\gamma^2=0$ $(\gamma>2)$. Отсюда следует, что $\nu_\gamma=\sigma_\gamma=0$ при $\gamma>2$ — иначе существовала бы зависимость между p и q, не содержащая θ и ω, и мы пришли бы к ранее разобранному случаю. Поэтому левые части равенств (129) тождественно равны нулю. Остается исследовать, не будут ли решениями уравнений Кодацци те значения θ и ω, которые обращают в нуль правые части указанных нами равенств.

Если уравнения (129) удовлетворяются тождественно, то для решения вопроса о том, будет ли рассматриваемое пространство класса I, нужно исследовать уравнения $\Phi_{112}=0$, $\Phi_{212}=0$. Они имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\nu_1^2\frac{\partial p}{\partial\theta}+2\nu_1\sigma_1\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_1^2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,2}+\left[\nu_1^2\frac{\partial p}{\partial\omega}+2\nu_1\sigma_1\frac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_1^2\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]\omega_{,2}-\\
&\quad-\left[\nu_1\nu_2\frac{\partial p}{\partial\theta}(\nu_1\sigma_2+\nu_2\sigma_1)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_1\sigma_2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,1}-\\
&\quad-\left[\nu_1\nu_2\frac{\partial p}{\partial\omega}+(\nu_1\sigma_2+\nu_2\sigma_1)\frac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_1\sigma_2\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]\omega_{,1}=\\
&\quad=V_{112}(x^1,x^2,\ldots,x^n,\theta,\omega),\\
&\left[\nu_1\nu_2\frac{\partial p}{\partial\theta}+(\nu_1\sigma_2+\nu_2\sigma_1)\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_1\sigma_2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,2}+\\
&\quad+\left[\nu_1\nu_2\frac{\partial p}{\partial\omega}+(\nu_1\sigma_2+\nu_2\sigma_1)\frac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_1\sigma_2\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]\omega_{,2}-\\
&\quad-\left[\nu_2^2\frac{\partial p}{\partial\theta}+2\nu_2\sigma_2\frac{\partial q}{\partial\theta}+\sigma_2^2\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]\theta_{,1}-\\
&-\left[\nu_2^2\frac{\partial p}{\partial\omega}+2\nu_2\sigma_2\frac{\partial q}{\partial\omega}+\sigma_2^2\frac{\partial r}{\partial\omega}\right]\omega_{,1}=V_{212}(x^1,x^2,\ldots,x^n,\theta,\omega).
\end{aligned}\right\}\quad(131)$$

Из уравнений (131) можно найти $\theta_{,2}$ и $\omega_{,2}$. В таком случае, как известно*, решения будут зависеть от двух произвольных функций от x^1.

§ 8

Итак, все возможные варианты разобраны. В том случае, когда справедливо неравенство (26), даны необходимые и достаточные условия в явном виде, в тензорной форме, для того, чтобы пространство имело класс I. Если эти условия выполнены, то можно дать инвариантное выражение для тензора $\Omega_{\alpha\beta}$ с точностью до знака; пространство неизгибаемо.

В случае существования равенства (26а) дан прием отыскания в каждом отдельном случае тензора $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего уравнениям Гаусса и Кодацци, и изучена степень общности решения.

Те случаи изгибания пространства, возможность которых нами указана (пространство зависит от одного параметра, от одной или от двух произвольных функций одного аргумента), существуют реально. Они разобраны E. Cartan'ом (4).

Поступило
3. X. 1941

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенсон Н. А., О римановых пространствах класса I, ч. II, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 5 (1941), 325—351.
2. Weise K. H., Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen, Math. Annalen, 110 (1935), 522—570.
3. Thomas T. Y., Riemann spaces of class one and their characterisation, Acta Mathematica, 67 (1936), 169—211.
4. Cartan E., La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions, Bulletin de la Société mathématique de France, 144 (1é16), 65—99.

* См. E. Goursat, loc. cit.

N. ROSENSON. SUR LES ESPACES RIEMANNIENS DE CLASSE I.

TROISIÈME PARTIE

RÉSUME

Dans la seconde partie de ce mémoire (1) nous avons donné les conditions necessaires et suffisantes pour qu'un espace Riemannien soit de classe I — dans le cas, où le rang de la deuxième forme quadratique est au moins trois. Le cas, où le rang de cette forme est égal à deux est examiné dans l'article présent. Il faut observer, que dans les mémoires de K. H. Weise (2) et T. Y. Thomas (3) sur le caractère de l'espace Riemannien de classe I ce cas n'était pas considéré.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 285-296 Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе дан прием для нахождения всех спектральных функций симметрического оператора. Этот прием применяется затем к операторам с индексом дефекта (1, 1). В частности, отсюда получается формула Неванлинна для решений степенной проблемы моментов.

В статье (¹) было дано полное описание всех спектральных функций симметрического оператора при помощи введенного там понятия расширения симметрического оператора. Однако результаты этой статьи, несмотря на свою полноту с теоретической точки зрения, не дают практических приемов для нахождения спектральных функций в различных конкретных случаях. В настоящей заметке мы имеем в виду указать один такой общий прием и применить его к операторам с индексом дефекта (1,1).

С такими операторами приходится, например, иметь дело в разного рода проблемах моментов* каждый раз, когда имеет место так называемый неопределенный случай. Здесь, ради простоты и краткости изложения, мы ограничимся применением общего результата об операторах с индексом дефекта (1,1) к классическому случаю степенной проблемы моментов в $(-\infty, \infty)$, что приведет нас к известной формуле Неванлинна (²).

Более подробно на развитых здесь методах и их приложениях к более широким классам операторов мы имеем в виду остановиться в отдельной статье.

Всюду в этой заметке без особых оговорок используются обозначения и результаты статьи (¹).

§ 1. Общая формула для спектральных функций

Пусть H_1 — замкнутый симметрический оператор в гильбертовском пространстве $\mathfrak{H}_1$, а $\mathfrak{H}$ — гильбертовское пространство, содержащее $\mathfrak{H}_1$ и такое, что

$$\dim \mathfrak{H}_2 \geqslant \dim \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1.$$

* М. С. Лившиц сообщил мне недавно полученные им общие критерии разрешимости, охватывающие много различных типов проблем моментов.

Тогда [см. ([1]), теорема 5] всякая спектральная функция $E_1(\mu)$ оператора H_1 задается формулой $E_1(\mu)g = E_1E(\mu)g$, $g \in \mathfrak{H}_1$, где $E(\mu)$ — спектральная функция самосопряженного расширения H в $\mathfrak{H}$ оператора H_1, а E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$

Пользуясь формулой обращения Стильтьеса, можно определить оператор $E_1(\mu)$, если известен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu)g}{\mu-\lambda} = E_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\mu)g}{\mu-\lambda} = E_2(H-\lambda 1)^{-1}g \qquad (1)$$

для всех λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и всех $g \in \mathfrak{H}_1$. Таким образом, наша задача определения всех $E_1(\mu)$ сводится к определению всех $E_1(H-\lambda 1)^{-1}g$. При этом в силу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu)}{\mu-\bar{\lambda}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu)}{\mu-\lambda}\right)^*$ достаточно определить этот оператор в одной из полуплоскостей $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Положим $f = (H-\lambda 1)^{-1}g$; так как $f \in \mathfrak{D}(H)$, то [см. ([1]), теорема 3] f представляется в виде

$$f = f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) + f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2), \qquad (2)$$
$$f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \overset{1}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}, \quad \varphi_2 = \overset{2}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda},$$

где H_2 — замкнутый эрмитовский оператор в $\mathfrak{H}_2$, а $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — оператор, изометрически отображающий $\overset{1}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} \oplus \overset{2}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$ на $\overset{1}{\mathfrak{M}}_{\lambda} \oplus \overset{2}{\mathfrak{M}}_{\lambda}$. При этом

$$Hf = H_1f_1 - \bar{\lambda}\varphi_1 + \lambda(U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) + H_2f_2 - \bar{\lambda}\varphi_2 + \lambda(U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$g = Hf - \lambda f = H_1f_1 - \lambda f_1 + (\lambda - \bar\lambda)\varphi_1 + H_2f_2 - \lambda f_2 + (\lambda - \bar{\lambda})\varphi_2, \qquad (4)$$

а так как $g \in \mathfrak{H}_1$, то должно быть $H_2f_2 - \lambda f_2 + (\lambda - \bar{\lambda})\varphi_2 = 0$. С другой стороны, $H_2f_2 - \lambda f_2 \perp \varphi_2$; поэтому из последнего равенства следует, что $\varphi_2 = 0$, $f_2 = 0$, и (2), (4) принимают вид:

$$f = f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_1,$$
$$g = H_1f_1 - \lambda f_1 + (\lambda - \bar\lambda)\varphi_1.$$

Пусть $\overset{1}{Q}_{\bar\lambda}$ — оператор проектирования в $\mathfrak{H}_1$ на $\overset{1}{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda}$; тогда последнее равенство дает: $H_1f_1 - \lambda f_1 = (1 - \overset{1}{Q}_{\bar\lambda})g$, $(\lambda - \bar{\lambda})\varphi = \overset{1}{Q}_{\bar\lambda}g$, следовательно, $f_1 = (H_1 - \lambda 1)^{-1}(1 - \overset{1}{Q}_{\bar\lambda})g$, $\varphi_1 = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \overset{1}{Q}_{\bar\lambda} g$ и

$$E_1(H - \lambda 1)^{-1}g = E_1f = f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 = (H_1 - \lambda 1)^{-1}(1 - \overset{1}{Q}_{\bar\lambda})g -$$
$$- \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \overset{1}{Q}_{\bar\lambda} g + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} U_{11} \overset{1}{Q}_{\bar\lambda} g. \qquad (5)$$

Векторы $(H_1 - \lambda 1)^{-1}(1 - \overset{1}{Q}_{\bar\lambda})g$, $-\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \overset{1}{Q}_{\bar\lambda} g$ вполне определяются

оператором H_1, последнее же слагаемое $\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{11}Q^1_{\bar\lambda}g$ зависит еще и от U_{11}, т. е. от выбора того или иного расширения H оператора H_1. Поэтому задача определения всех $E_1(\mu)$ будет решена, если сумеем определить все U_{11} в зависимости от λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Рассмотрим для этого элемент $h = -\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_{\bar\lambda}g + \frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{11}Q^1_{\lambda}g + \frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{21}Q^1_{\lambda}g$. Он получается, если положить в (2) $f_1=f_2=\varphi_2=0$, поэтому $h\in\mathfrak{D}(H)$. Пусть λ_0 — фиксированное не-действительное число. Применяя (2) и (3) к h вместо g и λ_0 вместо λ, получим

$$-\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_{\bar\lambda}g + \frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{11}Q^1_{\lambda}g + \frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{21}Q^1_{\lambda}g =$$
$$= f_1^0 - \varphi_1^0 + (V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0) + f_2^0 - \varphi_2^0 + (V_{21}\varphi_1^0 + V_{22}\varphi_2^0),$$
$$-\frac{\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_{\bar\lambda}g + \frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}U_{11}Q^1_{\lambda}g + \frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}U_{21}Q^1_{\lambda}g =$$
$$= H_1 f_1^0 - \bar\lambda_0\varphi_1^0 + \lambda_0(V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0) + H_2 f_2^0 - \bar\lambda_0\varphi_2^0 + \lambda_0(V_{21}\varphi_1^0 + V_{22}\varphi_2^0),$$

где f_1^0, φ_1^0, φ_2^0, V_{jk} — значения f_1, φ_1, φ_2, U_{jk}, соответствующие λ_0.

Проектируя эти равенства на $\mathfrak{H}_1$ и на $\mathfrak{H}_2$, получим

$$-\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_{\bar\lambda}g + \frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{11}Q^1_{\lambda}g = f_1^0 - \varphi_1^0 + (V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0), \tag{6}$$

$$-\frac{\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_{\bar\lambda}g + \frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}U_{11}Q^1_{\lambda}g = H_1 f_1^0 - \bar\lambda_0\varphi_1^0 + \lambda_0(V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0), \tag{7}$$

$$\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}U_{21}Q^1_{\lambda}g = f_2^0 - \varphi_2^0 + (V_{21}\varphi_1^0 + V_{22}\varphi_2^0), \tag{8}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}U_{21}Q^1_{\lambda}g = H_2 f_2^0 - \bar\lambda_0\varphi_2^0 + \lambda_0(V_{21}\varphi_1^0 + V_{22}\varphi_2^0). \tag{9}$$

Умножая (6) на $-\lambda\,(-\bar\lambda)$ и складывая с (7), придем к равенствам

$$Q^1_{\bar\lambda}g = H_1 f_1^0 - \lambda f_1^0 - (\bar\lambda_0 - \lambda)\,\varphi_1^0 + (\lambda_0 - \lambda)(V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0), \tag{10}$$

$$U_{11}Q^1_{\bar\lambda}g = H_1 f_1^0 - \bar\lambda f_1^0 - (\bar\lambda_0 - \bar\lambda)\,\varphi_1^0 + (\lambda_0 - \bar\lambda)(V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0). \tag{11}$$

Аналогично, умножая (8) на $-\lambda$ и складывая с (9), получим

$$0 = H_2 f_2^0 - \lambda f_2^0 - (\bar\lambda_0 - \lambda)\,\varphi_2^0 + (\lambda_0 - \lambda)(V_{21}\varphi_1^0 + V_{22}\varphi_2^0). \tag{12}$$

Наконец, применяя к обеим частям (10), (11), (12) операторы Q^1_{λ}, $Q^1_{\bar\lambda}$ и Q^2_{λ}, соответственно, находим

$$Q^1_{\lambda}g = -(\bar\lambda_0 - \lambda)\,Q^1_{\lambda}\varphi_1^0 + (\lambda_0 - \lambda)\,Q^1_{\lambda}(V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0), \tag{13}$$

$$U_{11}Q^1_{\lambda}g = -(\bar\lambda_0 - \bar\lambda)\,Q^1_{\bar\lambda}\varphi_1^0 + (\lambda_0 - \bar\lambda)\,Q^1_{\bar\lambda}(V_{11}\varphi_1^0 + V_{12}\varphi_2^0), \tag{14}$$

$$0 = -(\bar\lambda_0 - \lambda)\,Q^2_{\lambda}\varphi_2^0 + (\lambda_0 - \lambda)\,Q^2_{\lambda}(V_{21}\varphi_1^0 + V_{22}\varphi_2^0). \tag{15}$$

Равенства (13) и (15) представляют собою линейное отображение некоторого подпространства $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}\oplus\mathfrak{M}^2_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}^1_{\lambda}$. Это отображение взаимно однозначно, ибо из $Q^1_{\lambda}g = 0$ следует, что левая часть (6) обра-

щается в нуль, а значит, в силу линейной независимости $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda_0}$, $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}$ и $\mathfrak{D}(H_1)$, что $f_1^0=0$, $\varphi_1^0=0$, $V_{11}\varphi_1^0+V_{12}\varphi_2^0=0$, т. е. $V_{12}\varphi_2^0=0$, $\varphi_2^0=0$ [см. ([1]), § 2, (9)]. Кроме того, в силу произвольности g, образом при этом отображении должны быть все $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}$. Поэтому существует обратное отображение, которое является ограниченным оператором из $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}$ в $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}\oplus\mathfrak{M}^2_{\lambda_0}$. Другими словами,

$$\varphi_1^0=B^1_\lambda Q^1_{\bar\lambda}g,\quad \varphi_2^0=B^2_\lambda Q^1_{\bar\lambda}g, \tag{16}$$

где B^1_λ, B^2_λ ограниченные операторы из $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}$ в $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda_0}$ и $\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda_0}$, соответственно, вполне определяемые известными операторами $Q^1_{\bar\lambda}$, $Q^1_{\bar\lambda}$, $Q^2_{\bar\lambda}$, V_{jk}. Подставляя (16) в (14), получаем

$$U_{11}Q^1_{\bar\lambda}g \quad -(\bar\lambda_0-\bar\lambda)\,Q^1_\lambda B^1_\lambda Q^1_{\bar\lambda}g+(\lambda_0-\lambda)\,Q^1_\lambda(V_{11}B^1_\lambda Q^1_{\bar\lambda}g+V_{12}B^2_\lambda Q^1_{\bar\lambda}g);$$

следовательно, в силу (5),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_1(\mu)\,g}{\mu-\lambda}=E_1(H-\lambda 1)^{-1}g=$$

$$=(H_1-\lambda 1)^{-1}(1-Q^1_\lambda)\,g-\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_\lambda g-$$

$$-\frac{\bar\lambda_0-\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_\lambda B^1_\lambda Q^1_\lambda g+\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda-\bar\lambda}Q^1_\lambda(V_{11}B^1_\lambda Q^1_{\bar\lambda}g+V_{12}B^2_\lambda Q^1_\lambda g). \tag{17}$$

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Совокупность всех спектральных функций замкнутого симметрического оператора задается формулой* (17).

§ 2. Операторы с индексом дефекта (1,1)

Пусть теперь H_1 — произвольный замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (1,1); применим к нему формулу (17). Для этого отметим прежде всего, что в силу (6) § 2 в ([1]) при любом λ, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, $\dim\mathfrak{M}^2_\lambda=\dim\mathfrak{M}^1_\lambda=1$. С другой стороны, должно быть $\dim(\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda})=$ $=\dim(\mathfrak{M}^1_\lambda\oplus\mathfrak{M}^2_\lambda)$, следовательно, либо $\dim\mathfrak{M}^2_\lambda=\dim\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}=0$, либо $\dim\mathfrak{M}^2_\lambda=\dim\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}=1$. Отбрасывая пока первый случай, обозначим через ψ^1_λ, ψ^2_λ нормированные элементы $\mathfrak{M}^1_\lambda$ и $\mathfrak{M}^2_\lambda$. Тогда

$$Q^1_\lambda g=(g,\psi^1_\lambda)\,\psi^1_\lambda,\qquad Q^2_\lambda h=(h,\psi^2_\lambda)\,\psi^2_\lambda; \tag{18}$$

кроме того, мы можем положить $\varphi_1^0=\xi\psi^1_{\bar\lambda_0}$; $\varphi_2^0=\eta\psi^2_{\bar\lambda_0}$, $V_{11}\psi^1_{\bar\lambda_0}=\alpha\psi^1_{\lambda_0}$, $V_{12}\psi^2_{\bar\lambda_0}=\beta\psi^1_{\lambda_0}$, $V_{21}\psi^1_{\bar\lambda_0}=\gamma\psi^2_{\lambda_0}$; $V_{22}\psi^2_{\bar\lambda_0}=\delta\psi^2_{\lambda_0}$. Матрица $\left\|\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{smallmatrix}\right\|$; очевидно, унитарная, следовательно, $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, $|\alpha|^2+|\gamma|^2=1$, $\alpha\bar\gamma+\beta\bar\delta=0$. Отсюда

$$\beta=\sigma\sqrt{1-|\alpha|^2},\quad \gamma=\tau\sqrt{1-|\alpha|^2},\quad \delta=-\bar\alpha\sigma\tau, \tag{19}$$

где $|\sigma|=|\tau|=1$. При $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$ и $E_1(\mu)$ соответствует расширению первого рода [см. ([3]), стр. 53]. Тем самым включается ранее отброшенный случай $\dim \mathfrak{M}_{\lambda}^2=\dim \mathfrak{M}_{\bar\lambda}^2=0$. Подставляя все эти выражения в (13), (14) и (15), получим:

$$(g, \psi_{\bar\lambda}^1)\psi_\lambda^1 = -(\bar\lambda_0-\lambda)\xi(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_{\bar\lambda}^1)\psi_\lambda^1+(\lambda_0-\lambda)[\xi\alpha(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_{\bar\lambda}^1)\psi_\lambda^1+$$
$$+\eta\sigma\sqrt{1-|\alpha|^2}(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)\psi_\lambda^1],$$

$$U_{11}Q_\lambda^1 g = -(\bar\lambda_0-\bar\lambda)\xi(\psi_{\bar\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)\psi_\lambda^1+(\lambda_0-\bar\lambda)[\xi\alpha(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)\psi_\lambda^1+$$
$$+\eta\sigma\sqrt{1-|\alpha|^2}(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)\psi_\lambda^1],$$

$$0=-(\lambda_0-\lambda)\eta(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_{\bar\lambda}^2)\psi_\lambda^2+(\lambda_0-\lambda)[\xi\tau\sqrt{1-|\alpha|^2}(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_{\bar\lambda}^2)\psi_\lambda^2-$$
$$-\eta\bar\alpha\sigma\tau(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_{\bar\lambda}^2)\psi_{\bar\lambda}^2,$$

откуда

$$(g, \psi_{\bar\lambda}^1)=[-(\bar\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_{\bar\lambda_0}^1\psi_{\bar\lambda}^1, \psi_{\bar\lambda}^1, \psi_{\bar\lambda}^1)+(\lambda_0-\lambda)(\psi_\lambda^1, \psi_{\bar\lambda}^1)\alpha]\xi+$$
$$+(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)\sigma\sqrt{1-|\alpha|^2}\eta, \tag{20}$$

$$U_{11}Q_\lambda^1 g=\{[-(\bar\lambda_0-\lambda)(\psi_\lambda^1, \psi_\lambda^1)+(\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_\lambda^1, \psi_{\bar\lambda}^1)\alpha]\xi+$$
$$+(\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)\sigma\sqrt{1-|\alpha|^2}\eta\}\psi_\lambda^1, \tag{21}$$

$$0=(\lambda_0-\lambda)\tau\sqrt{1-|\alpha|^2}(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_{\bar\lambda}^2)\xi+[-(\bar\lambda_0-\lambda)(\psi_{\bar\lambda_0}^2, \psi_\lambda^2)-$$
$$-(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_\lambda^2)\alpha\sigma\tau]\eta. \tag{22}$$

Решая уравнения (20), (22) относительно ξ, η и подставляя их выражения в (21), получим

$$U_{11}Q_{\lambda_0}^1 g=\frac{(\bar\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_{\bar\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)S-(\lambda_0-\bar\lambda)(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)T}{(\bar\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_\lambda^1)S-(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^1, \psi_{\bar\lambda}^1)T}(g, \psi_\lambda^1)\psi_\lambda^1, \tag{23}$$

где (для краткости) положено

$$S=[(\bar\lambda_0-\lambda)(\psi_{\bar\lambda_0}^2, \psi_{\bar\lambda}^2)+(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_{\bar\lambda}^2)\bar\alpha\sigma\tau,$$
$$T=(\bar\lambda_0-\lambda)(\psi_{\bar\lambda}^2, \psi_\lambda^2)\alpha+(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^2, \psi_\lambda^2)\sigma\tau.$$

В этой формуле ψ_λ^1 зависит только от H_1, тогда как λ_λ^2 зависит от выбора H_2, т. е. от выбора расширения H оператора H_1. Займемся теперь определением степени произвольности входящих в (23) скалярных произведений элементов ψ_λ^2.

Пусть U_2 — трансформация Кели H_2, соответствующая λ_0; мы можем расширить U_2 до унитарного оператора U в $\mathfrak{H}_2$, полагая, например,

$U\psi^2_{\bar\lambda_0} = \psi^0_{\lambda_0}$. Обозначим через $E_2(\mu)$ спектральную функцию U; тогда, для любого $h \in \mathfrak{H}_2$, $Uh = \int_0^{2\pi} e_{i\mu} dE_2(\mu)\, h$. Положим

$$g_\lambda = \int_0^{2\pi} \frac{dE_2(\mu)\,\psi^2_{\bar\lambda_0}}{(\bar\lambda_0-\lambda)e^{-i\mu}-(\lambda_0-\lambda)}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0 \tag{24}$$

и докажем, что $g_\lambda \in \mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}$, т. е. что g_λ ортогонален ко всем $H_2 f_2 - \bar\lambda f_2$, $f_2 \in \mathfrak{D}(H_2)$. Мы имеем: $f_2 = -\varphi + U_2\varphi$, $H_2 f_2 = -\bar\lambda_0\varphi + \lambda_0 U_2\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{D}(U_2)$. Отсюда

$$H_2 f_2 - \bar\lambda f_2 = (\lambda_0 - \bar\lambda)\,U_2\varphi - (\bar\lambda_0 - \bar\lambda)\,\varphi = (\lambda_0 - \bar\lambda)\,U\varphi - (\bar\lambda_0 - \lambda)\,\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} [(\lambda_0 - \bar\lambda)\,e^{i\mu} - (\bar\lambda_0 - \bar\lambda)\,]\,dE_2(\mu)\,\varphi;$$

следовательно,

$$(g_\lambda,\ H_2 f_2 - \bar\lambda f_2) = (\psi^2_{\bar\lambda},\ \varphi) = 0,$$

ибо $\psi^2_{\bar\lambda}$, как элемент $\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}$, ортогонален к φ — элементу $\mathfrak{D}(U_2) = \operatorname{Re}(H_2 - \lambda 1)$. Кроме того, очевидно, что $g_\lambda \neq 0$, так что мы можем положить $\psi^2_{\bar\lambda} = \frac{g_\lambda}{|g_\lambda|}$; следовательно, $(h,\ \psi^2_{\bar\lambda}) = (h,\ g_\lambda)\frac{1}{|g_\lambda|}$. Введем обозначение $\rho(\mu) = (E_2(\mu)\,\psi^2_{\bar\lambda_0},\ \psi^2_{\bar\lambda_0})$; $\rho(\mu)$ — неубывающая функция в интервале $[0, 2\pi]$, $\rho(0) = 0$, $\rho(2\pi - 0) = 1$ и

$$\left.\begin{aligned}
(\psi^2_{\bar\lambda_0},\ g_{\bar\lambda}) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\rho(\mu)}{(\lambda_0-\lambda)\,e^{i\mu}-(\bar\lambda_0-\lambda)}, \\
(\psi^2_{\lambda_0},\ g_{\bar\lambda}) = (U\psi^2_{\bar\lambda_0},\ g_{\bar\lambda}) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\mu}\,d\rho(\mu)}{(\lambda_0-\lambda)\,e^{i\mu}-(\bar\lambda_0-\lambda)}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Докажем, что когда $E_1(\mu)$ пробегает все спектральные функции H_1, то $\rho(\mu)$ пробегает все неубывающие функции в $[0, 2\pi]$, удовлетворяющие условию: $\rho(0) = 0$, $\rho(2\pi - 0) = 1$. В самом деле, если $\rho(\mu)$ — такая функция, то реализуем $\mathfrak{H}_2$ в виде пространства функций $f(x)$, $0 \leqslant x < 2\pi$, для которых $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, d\rho(x) < +\infty$ и положим там $Uf(x) = e^{ix} f(x)$, $\psi^2_{\bar\lambda_0} \equiv 1$. Оператор U, рассматриваемый только на $\mathfrak{H}_2 \ominus \{\psi^2_{\bar\lambda_0}\}$, будет трансформацией Кели некоторого эрмитовского оператора H_2 в $\mathfrak{H}_2$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что при $\varphi \in \mathfrak{H}_2 \ominus \{\psi^2_{\bar\lambda_0}\}$, $\varphi \neq 0$ равенство $U\varphi = \varphi$ невозможно. Но $U\varphi = \varphi$ означает, что $(e^{ix} - 1)\,\varphi(x) = 0$ почти всюду в $[0, 2\pi]$ относительно $\rho(x)$, следовательно, $\varphi(x) = 0$ при $x \neq 0$. Поэтому $\varphi \neq 0$ лишь тогда, когда скачок $\Delta\rho(0)$ функции $\rho(x)$ в точке $x = 0$ отличен от нуля. С другой стороны, условие $\varphi \perp \psi^2_{\bar\lambda_0}$ дает

$$0 = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, \psi^2_{\bar{\lambda}_0}(x)\, d\rho(x) = \varphi(0)\, \Delta\rho(0), \quad \varphi(0) = 0,$$

так что $\varphi = 0$.

Итак, U есть трансформация Кели некоторого H_2, которому соответствуют расширения H оператора H_1. Эти расширения определяют спектральные функции $E_1(\mu)$ оператора H_1, каждой из которых соответствует заданная функция $\rho(\mu)$, ибо в данном случае $E_2(\mu)\, \psi^2_{\bar{\lambda}_0}(x) = 1$ при $x < \mu$ и $= 0$ при $x \geqslant \mu$; следовательно,

$$(E_2(\mu)\, \psi^2_{\bar{\lambda}_0},\ \psi^2_{\bar{\lambda}_0}) = \int_0^{\mu} d\rho(x) = \rho(\mu).$$

При произвольных таких $\rho(\mu)$ формула $F_1(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\mu} - z}{e^{i\mu} + z}\, d\rho(\mu)$ дает общий вид функций, аналитических внутри единичного круга и удовлетворяющих там условиям $\operatorname{Re} F_1(z) \geqslant 0$, $F_1(0) = 0$ [см. ([4])]. Но, когда $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0$, точка $z = \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda}{\lambda_0 - \lambda}$ заполняет единичный круг и, следовательно,

$$F_2(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\mu} - \dfrac{\bar{\lambda}_0 - \lambda}{\lambda_0 - \lambda}}{e^{i\mu} + \dfrac{\bar{\lambda}_0 - \lambda}{\lambda_0 - \lambda}}\, d\rho(\mu)$$

будет общим видом функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0$ и удовлетворяющих там условиям: $\operatorname{Re} F_2 \geqslant 0$, $F_2(\bar{\lambda}_0) = 1$. Однако, в силу (25),

$$1 + F_2(\lambda) = 2(\lambda_0 - \lambda)(\psi^2_{\lambda_0},\ g_{\bar{\lambda}}),$$
$$1 - F_2(\lambda) = 2(\bar{\lambda}_0 - \lambda)(\psi^2_{\bar{\lambda}_0},\ g_{\bar{\lambda}}),$$

и, следовательно,

$$F_3(\lambda) = \frac{1 - F_2(\lambda)}{1 + F_2(\lambda)} = \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \cdot \frac{(\psi^2_{\bar{\lambda}_0},\ g_{\bar{\lambda}})}{(\psi^2_{\lambda_0},\ g_{\bar{\lambda}})} = \frac{\bar{\lambda}_0 - \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \cdot \frac{(\psi^2_{\bar{\lambda}_0},\ \psi^2_{\bar{\lambda}})}{(\psi^2_{\lambda_0},\ \psi^2_{\bar{\lambda}})} \tag{26}$$

будет общим видом функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda < 0$ и удовлетворяющих там условиям $|F_3(\lambda)| \leqslant 1$, $F_3(\bar{\lambda}_0) = 0$. С другой стороны, в силу (26),

$$\frac{(\bar{\lambda}_0 - \lambda)(\psi^2_{\bar{\lambda}_0},\ \psi^2_{\bar{\lambda}}) + (\lambda_0 - \lambda)(\psi^2_{\lambda_0},\ \psi^2_{\lambda})\, \bar{\alpha}\sigma\tau}{\alpha(\bar{\lambda}_0 - \lambda)(\psi^2_{\bar{\lambda}_0},\ \psi^2_{\bar{\lambda}}) + (\lambda_0 - \lambda)(\psi^2_{\lambda_0},\ \psi^2_{\lambda})\, \sigma\tau} = \frac{F_3(\lambda) + \bar{\alpha}\sigma\tau}{\alpha F_3(\lambda) + \sigma\tau};$$

последнее же выражение есть произвольная функция $F(\lambda)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda<0$ и удовлетворяющая там условию $|F(\lambda)|\leqslant 1$. Поэтому (23) перепишется в виде

$$U_{11}Q_{\lambda}^{1}g=-\frac{(\bar{\lambda}_0-\bar{\lambda})(\psi_{\bar{\lambda}_0}^{1},\psi_{\lambda}^{1})F(\lambda)-(\lambda_0-\bar{\lambda})(\psi_{\lambda_0}^{1},\psi_{\lambda}^{1})}{(\bar{\lambda}_0-\lambda)(\psi_{\bar{\lambda}_0}^{1},\psi_{\bar{\lambda}}^{1})F(\lambda)-(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^{1},\psi_{\bar{\lambda}}^{1})}(g,\psi_{\bar{\lambda}}^{1})\psi_{\lambda}^{1},$$

а (17)—в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_1(\mu)\,g}{\mu-\lambda}=(H_1-\lambda 1)^{-1}[g-(g,\psi_{\bar{\lambda}}^{1})\psi_{\bar{\lambda}}^{1}]-\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}(g,\psi_{\bar{\lambda}}^{1})\psi_{\bar{\lambda}}^{1}+$$

$$+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}\cdot\frac{(\bar{\lambda}_0-\bar{\lambda})(\psi_{\bar{\lambda}_0}^{1},\psi_{\lambda}^{1})F(\lambda)-(\lambda_0-\bar{\lambda})(\psi_{\lambda_0}^{1},\psi_{\lambda}^{1})}{(\bar{\lambda}_0-\lambda)(\psi_{\bar{\lambda}_0}^{1},\psi_{\bar{\lambda}}^{1})F(\lambda)-(\lambda_0-\lambda)(\psi_{\lambda_0}^{1},\psi_{\bar{\lambda}}^{1})}(g,\psi_{\bar{\lambda}}^{1})\psi_{\lambda}^{1}, \qquad (27)$$

$$(\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda<0).$$

Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Совокупность всех спектральных функций замкнутого симметрического оператора с индексом дефекта* (1,1) *задается формулой* (27), *где* $F(\lambda)$—*произвольная функция, аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda<0$, *удовлетворяющая там условию* $|F(\lambda)|\leqslant 1$.

Отметим, что знак равенства в последнем неравенстве возможен лишь тогда, когда $F(\lambda)$ есть константа по модулю, равная единице. Получающаяся при этом спектральная функция $E_1(\mu)$ соответствует самосопряженному расширению первого рода оператора H_1.

§ 3. Применение к степенной проблеме моментов

Пусть оператор H_1 с индексом дефекта 1,1 задан матрицей Якоби

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right\|, \quad a_k=\bar{a}_k, \quad b_k>0$$

и некоторой полной ортонормальной системой $g_1, g_2, \dots$ в сепарабельном пространстве $\mathfrak{H}_1$. Тогда [см. ([1]), стр. 303—305] все решения проблемы моментов

$$S_n=(H_1^n g_1, g_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu^n\,d\sigma(\mu), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

определяются равенством $\sigma(\mu)=(E_1(\mu)g_1, g_1)$, где $E_1(\mu)$ пробегает все спектральные функции H_1. Кроме того, можно положить

$$\psi_{\lambda}^{1}=\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|P_k(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\lambda)\,g_k,$$

где

$$P(\lambda) \equiv 1, \quad P_2(\lambda) = \frac{\lambda - a_1}{b_1},$$

$$P_n(\lambda) = \frac{(\lambda - a_{n-1}) P_{n-1}(\lambda) - b_{n-2} P_{n-2}(\lambda)}{b_{n-1}}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Тогда

$$\left((H_1 - \lambda 1)^{-1}\left(g_1 - \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\bar{\lambda}) g_k\right), \; g_1\right) = -\frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_k(\bar{\lambda}) Q_k(\lambda)}{\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2},$$

где $Q_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_k(\lambda) - P_k(\mu)}{\lambda - \mu} d\sigma(\mu)$ не зависит от выбора решения $\sigma(\mu)$, ибо $\frac{P_k(\lambda) - P_k(\mu)}{\lambda - \mu}$ — полином относительно μ. Поэтому, полагая в (27) $g_* = g_1$ и умножая это равенство скалярно на g_1, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} = -\frac{1 + (\lambda - \bar{\lambda}) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\bar{\lambda}) Q_k(\lambda)}{(\lambda - \bar{\lambda}) \sum_{k=1}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2} +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda - \bar{\lambda}) \sum_{k=1}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2} \cdot \frac{(\lambda_0 - \bar{\lambda}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_k(\bar{\lambda}_0) P_k(\bar{\lambda})\right) F(\lambda) - (\lambda_0 - \bar{\lambda}) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda_0) P_k(\bar{\lambda})}{(\bar{\lambda}_0 - \lambda) \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_k(\bar{\lambda}_0) P_k(\lambda)\right) F(\lambda) - (\lambda_0 - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda_0) P_k(\lambda)}. \quad (28)$$

Применяя формулы

$$\left.\begin{aligned}
b_n [P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)] &= (x - y) \sum_{k=1}^{n} P_k(x) P_k(y), \\
b_n [Q_{n+1}(x) Q_n(y) - Q_n(x) Q_{n+1}(y)] &= (x - y) \sum_{k=1}^{n} Q_k(x) Q_k(y), \\
b_n [Q_{n+1}(x) P_n(y) - Q_n(x) P_{n+1}(y)] &= 1 + (x - y) \sum_{k=1}^{n} Q_k(x) P_k(y),
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

легко преобразовать (28) к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} = -\frac{[1 + (\lambda - \bar{\lambda}_0) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda_0) Q_k(\lambda)] F(\lambda) - [1 + (\lambda - \lambda_0) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda_0) Q_k(\lambda)]}{[(\lambda - \bar{\lambda}_0) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda_0) P_k(\lambda)] F(\lambda) - [(\lambda - \lambda_0) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\lambda_0) P_k(\lambda)]}. \quad (30)$$

Полагая в (30)

$$F(\lambda)=\frac{[-1+\lambda_0\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(0)P_k(\lambda_0)]\,\varphi(\lambda)-\lambda_0\sum_{k=1}^{\infty}P_k(0)P_k(\lambda_0)}{[-1+\bar{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(0)P_k(\bar{\lambda})]\,\varphi(\lambda)-\bar{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}P_k(0)P_k(\bar{\lambda}_0)} \qquad (31)$$

и применяя снова (29), получим известную формулу Неванлинна

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}=\frac{[\lambda\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(0)Q_k(\lambda)]\,\varphi(\lambda)-[1+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}P_k(0)Q_k(\lambda)]}{[1-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(0)P_k(\lambda)]\,\varphi(\lambda)+[\lambda\sum_{k=1}^{\infty}P_k(0)P_k(\lambda)]}, \qquad (32)$$

причем, в силу (31), $\varphi(\lambda)$ пробегает оовокупность всех функций, аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda>0$, $\operatorname{Im}\lambda<0$ и удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}\varphi(\lambda)\cdot\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Поступило
15.II. 1943.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М. А., Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 277—318.
[2] Nevanlinna R., Annales Acad. Sc. Fennicae (A), 18 (1922), № 5; 32 (1929), № 7.
[3] Наймарк М. А., Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 53—104.
[4] Herglotz G., Leipziger Berichte, 63 (1911).

M. A. NEUMARK. ON SPECTRAL FUNCTIONS OF A SYMMETRIC OPERATOR

SUMMARY

In this paper we give a method to find all spectral functions of a given symmetric operator H_1.

To this purpose, we use the results and notations of [1]. If H_1 is a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}\supset\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_1$, and $\dim\mathfrak{H}_2\geqslant\dim\mathfrak{H}_1$ then every spectral function $E_1(\mu)$ of H_1 is given by $E_1(\mu)g=E_1E(\mu)g$, $g\in\mathfrak{H}_1$, where E is the projection in $\mathfrak{H}$ into $\mathfrak{H}_1$ and $E(\mu)$ is the spectral function of a self-adjoint extension H of H_1 in $\mathfrak{H}$.

Using the Stieltjes inversion formula we define $E_1(\mu)$, if

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_1(\mu)g}{\mu-\lambda}=E_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(\mu)g}{\mu-\lambda}=E_1(H-\lambda 1)^{-1}g \qquad (1)$$

for all λ, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ and all $g\in\mathfrak{H}_1$ is known.

Put $f=(H-\lambda 1)^{-1}g$; then [see ([1]), Theorem 3]

$$f=f_1-\varphi_1+(U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2)+f_2-\varphi_2+(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2), \tag{2}$$

$$Hf=H_1f_1-\bar{\lambda}\varphi_1+\lambda(U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2)+H_2f_2-\bar{\lambda}\varphi_2+\lambda(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2). \tag{3}$$

These equations imply:

$$g=Hf-\lambda f=H_1f_1-\lambda f_1+(\lambda-\bar{\lambda})\varphi_1+H_2f_2-\lambda f_2+(\lambda-\bar{\lambda})\varphi_2. \tag{4}$$

As $g\in\mathfrak{H}_1$, we have $g=H_1f_1-\lambda f_1+(\lambda-\bar{\lambda})\varphi_1$; $H_2f_2-\lambda f_2+(\lambda-\bar{\lambda})\varphi_2=0$, $f_2=0$, $\varphi_2=0$, $H_1f_1-\lambda f_1=(1-Q^1_{\bar{\lambda}})g$, $(\lambda-\bar{\lambda})\varphi_1=Q^1_{\bar{\lambda}}g$, where $Q^1_{\bar{\lambda}}$ is the projection in $\mathfrak{H}_1$ into $\mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}}$. Hence

$$E_1(H-\lambda 1)^{-1}g=E_1f=f_1-\varphi_1+U_{11}\varphi_1=$$
$$=(H_1-\lambda 1)^{-1}(1-Q^1_{\bar{\lambda}})g-\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}Q^1_{\bar{\lambda}}g+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{11}Q^1_{\bar{\lambda}}g. \tag{5}$$

Let λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0$ be fixed. Put

$$h=-\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}Q^1_{\bar{\lambda}}g+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{11}Q^1_{\bar{\lambda}}g+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{21}Q^1_{\bar{\lambda}}g;$$

then, applying (2) and (3) to h and λ_0 instead of g and λ_0, we get:

$$-\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}Q^1_{\bar{\lambda}}g+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{11}Q^1_{\bar{\lambda}}g+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{21}Q^1_{\bar{\lambda}}g=$$
$$=f^0_1-\varphi^0_1+(V_{11}\varphi^0_1+V_{12}\varphi^0_2)+f^0_2-\varphi^0_2+(V_{21}\varphi^0_1+V_{22}\varphi^0_2),$$
$$-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda-\bar{\lambda}}Q^1_{\lambda}g+\frac{\lambda}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{11}Q^1_{\lambda}g+\frac{\lambda}{\lambda-\bar{\lambda}}U_{21}Q^1_{\bar{\lambda}}g=$$

$$=H_1f^0_1-\bar{\lambda}_0\varphi^0_1+\lambda_0(V_{11}\varphi^0_1+V_{12}\varphi^0_2)+H_2f^0_2-\bar{\lambda}_0\varphi^0_2+\lambda_0(V_{21}\varphi^0_1+V_{22}\varphi^0_2),$$

where f^0_1, φ^0_1, φ^0_2, V_{jk} are the f_1, φ_1, φ_2, U_{jk} corresponding to λ_0. These equations imply:

$$Q^1_{\bar{\lambda}}g=-(\bar{\lambda}_0-\lambda)Q^1_{\bar{\lambda}}\varphi^0+(\lambda_0-\lambda)Q^1_{\lambda}(V_{11}\varphi^0_1+V_{12}\varphi^0_2), \tag{6}$$

$$U_{11}Q^1_{\bar{\lambda}}g=-(\bar{\lambda}_0-\lambda)Q^1_{\lambda}\varphi^0_1+(\lambda_0-\bar{\lambda})Q^1_{\bar{\lambda}}(V_{11}\varphi^0_1+V_{12}\varphi^0_2), \tag{7}$$

$$0=-(\bar{\lambda}-\lambda)Q^2_{\lambda}\varphi^0_2+(\lambda_0-\lambda)Q^2_{\bar{\lambda}}(V_{21}\varphi^0_1+V_{22}\varphi^0_2). \tag{8}$$

Equations (6) and (8) show that

$$\varphi^0_1=B^1_{\lambda}Q^1_{\bar{\lambda}}g,\quad \varphi^0_2=B^2_{\lambda}Q^1_{\bar{\lambda}}g, \tag{9}$$

where B^1_{λ}, B^2_{λ} are bounded operators from $\mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}}$ into $\mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}_0}$ and $\mathfrak{M}^2_{\bar{\lambda}_0}$ re-

spectively, completely defined by the operators $\overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}}, \overset{1}{Q}_{\lambda}, \overset{2}{Q}_{\lambda}, V_{jk}$ already known. Hence by (7) and (5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu)\, g}{\mu - \lambda} = (H_1 - \lambda 1)^{-1} (1 - \overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}})\, g - \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}} g -$$

$$- \frac{\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}} \overset{1}{Q}_{\lambda} \overset{1}{B}_{\lambda} \overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}} g + \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}} \overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}} (V_{11} \overset{1}{B}_{\lambda} \overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}} g + V_{12} \overset{2}{B}_{\lambda} \overset{1}{Q}_{\bar{\lambda}} g). \qquad (10)$$

THEOREM 1. *The set of all spectral functions of a closed symmetric operator is given by* (10).

Using this result to an arbitrary symmetric operator H_1 with the deficiency index (1,1) we get:

THEOREM 2. *The set of all spectral functions of a closed symmetric operator with the deficiency index* (1,1) *is given by*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu)\, g}{\mu - \lambda} = (H_1 - \lambda 1)^{-1} [g - (g, \overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}}) \overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}}] -$$

$$- \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (g, \overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}}) \overset{1}{\psi}_{\lambda} + \frac{1}{\lambda - \lambda} \frac{(\bar{\lambda}_0 - \lambda)(\overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}_0}, \overset{1}{\psi}_{\lambda}) F(\lambda) - (\lambda_0 - \bar{\lambda})(\overset{1}{\psi}_{\lambda_0}, \overset{1}{\psi}_{\lambda})}{(\bar{\lambda}_0 - \lambda)(\overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}_0}, \overset{1}{\psi}_{\lambda}) F(\lambda) - (\lambda_0 - \lambda)(\overset{1}{\psi}_{\lambda}, \overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}})} (g, \overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}}) \overset{1}{\psi}_{\bar{\lambda}}, \qquad (11)$$

where $\psi^1_{\lambda} \in \mathfrak{M}^1_{\lambda}$, $|\psi^1_{\lambda}| = 1$ *and* $F(\lambda)$ *runs over all functions, analytic in the semiplane* $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda < 0$ *and satisfying there the condition:* $|F(\lambda)| \leqslant 1$.

Formula (11) includes as a particular case the well known formula of Nevanlinna for all solutions of the power moment problem.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 7 (1943), 297—298 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ДОПОЛНЕНИЕ К МОЕЙ СТАТЬЕ «УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ»*

И. М. Гельфанд обратил мое внимание на один недочет в моем доказательстве теоремы о поверхностях отрицательной кривизны, который я хочу здесь исправить**. А именно, из доказанного мною утверждения, что по крайней мере две из четырех областей $\Omega_1\,(\rho(x, y) < 0)$ и $\Omega_2\,(\rho(x, y) > 0)$ находятся целиком между ветвями c_i и c_s гиперболы

$$(A^2-\delta^2)\,y^2-\delta^2x^2=h^2, \tag{4}$$

я вывел (стр. 287), что по крайней мере одна из них Ω_2 обладает свойством, что, если из некоторой ее точки $(x_1\ y_1)$ можно провести линию L внутри Ω_2, во всех точках которой $x \geqslant x_1$ и $x \to \infty$, то ни из одной из точек $(x_2,\ y_2)$ области Ω_2 нельзя провести линии в этой области так, чтобы $x \leqslant x_2$ и $x \to -\infty$. Это L-свойство области является единственным, как мы сейчас увидим, которое нужно для следующей части доказательства. Между тем, упустив из виду возможность a priori некоторых «патологических» исключений (что и было замечено И. М. Гельфандом), я неточно формулировал выведенное L-свойство, заменив его несколько более узким свойством, что область Ω_2 простирается до бесконечности лишь в одном направлении $(x_0' < x)$, которое и было технически использовано в указанном месте при установлении основного неравенства

$$u(x_1) \geqslant \frac{x_1-x_0'}{x_0-x_0'}\,u(x_0) \qquad (x_0' < x_0 < x_1), \tag{5}$$

где $u(x)=\max\rho(x, y) \geqslant 0$ для точек области Ω_2 (и ее границы) и $u(x_0')=0$.

Однако при помощи того же рассуждения можно, пользуясь лишь тем, что Ω_2 заключена между c_i и c_s, получить аналогичное неравенство

$$u(x_1)-u(a_0) \geqslant \frac{x_1-a_0}{x_0-a_0}\,(u(x_0)-u(a_0)) \tag{5 bis}$$

при *любых* $a_0 < x_0 < x_1$, так как, если бы неравенство (5 bis) не выполнялось, то функция

$$w(x,\ y)=\frac{x-a_0}{x_1-a_0}\,(u(x_1)-u(a_0))+u(a_0)-\rho(x,\ y) \tag{6 bis}$$

---

* Изв. Акад. Наук, серия матем., VI (1942), № 6, 285—290.

** Тот же недочет имеется и в соответствующем месте моей статьи «Об одной геометрической теореме и т. д.» (русский перевод в «Успехах математических наук», вып. VIII).

становилась бы отрицательной при $x=x_0$, $y=y_0$ (где $\rho(x_0, y_0)=u(x_0)$, так что существовала бы область B, включающая точку x_0, y_0, где $w<0$; но это противоречит первоначальной лемме (стр. 286), так как $w \geqslant 0$ при $x=a_0$, при $x=x_1$, а также, если $\rho(x, y) \leqslant 0$ при $a_0<x<x_1$. Таким образом, «патологический» случай отличается только тем, что мы не можем гарантировать существование абсциссы x_0', для которой $u(x_0')=0$, обращающей неравенство (5 bis) в неравенство (5). Но (5 bis) может сыграть ту же роль для окончания доказательства, что и (5), если есть два таких значения $a<b$, что $u(a)<u(b)$; L-свойство области Ω_2 нужно было, в сущности, только для того, чтобы обойти это маленькое затруднение.

В самом деле, возьмем две произвольные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) внутри Ω_2, где $\rho(x_0, y_0)=u(x_0)$, $\rho(x_1, y_1)=u(x_1)$ $(x_0<x_1)$, и соединим их линией Жордана, лежащей в Ω_2, обозначая на ней через (x_2, y_2) точку с наибольшей абсциссой $x_2>x_1$. В таком случае, вследствие L-свойства области Ω_2, слева от прямой $x=x_2$ из области Ω_2 будет срезана связная часть ее $\omega\,(\rho(x, y)>0)$, содержащая точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) и (x_2, y_2), ограниченная прямой $x=x_2$ и точками, где $\rho(x, y)=0$ при $x<x_2$, причем нижняя грань $x_0'<x_0$ абсцисс точек области ω должна быть конечна (завися, вообще, от x_2), так как иначе в области Ω_2 существовала бы линия L, исходящая из (x_2, y_2), на которой $x<x_2$ и $x \to -\infty$. Отсюда следует, что неравенство

$$u(x_1) \geqslant \frac{x_1-x_0'}{x_0-x_0'}\, u(x_0) \tag{5}$$

могло бы не осуществиться лишь в том случае, когда

$$u(x_2) > \frac{x_2-x_0'}{x_1-x_0'}\, u(x_1). \tag{7}$$

Действительно, функция

$$\sigma(x, y)=\frac{x-x_0'}{x_1-x_0'}\, u(x_1)-\rho(x, y), \tag{6}$$

которая не отрицательна на той части границы области ω, где $x_0' \leqslant x<x_2$, $\rho(x, y)=0$, может быть отрицательной в точке (x_0, y_0) (т. е. нарушить (5)) только в том случае, если на прямой $x=x_2$ в Ω_2 есть точки, где

$$\sigma(x_2, y_2)=\frac{x_2-x_0'}{x_1-x_0'}\, u(x_1)-\rho(x_2, y_2)<0,$$

т. е. если

$$u(x_2) > \frac{x_2-x_0'}{x_1-x_0'}\, u(x_1)\,. \tag{7}$$

Полученная альтернатива ((5) или (7)) дает нам требуемое: $u(x_1)>u(x_0)$ или $u(x_2)>u(x_1)$ $(x_0<x_1<x_2)$, а потому, согласно сказанному выше, неравенство (5 bis) вполне заменяет неравенство (5).

Таким образом, указанный недочет изложения имеет технический, а не принципиальный характер.

Поступило
28. I. 1944.

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 7

TABLES DES MATIÈRES DU TOME 7